НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТОМСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

СБОРНИК ТРУДОВ

XXV Всероссийской конференции-конкурса
исследовательских работ старшеклассников
«Юные исследователи – науке и технике»

22 – 23 марта 2024 г.

Секция «Математика: от науки к инженерии»

Издательство
Томского политехнического университета
Томск 2024

УДК 001.891-057.874:373.5.046.16(063)
ББК 72-74.204я431
Ю571
Юные исследователи – науке и технике: сборник трудов XXV Всероссийской конференции-конкурса Исследовательских работ старшеклассников «Юные исследователи – науке и технике»; Томский политехнический университет. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2024
В сборнике трудов представлены материалы работ школьников.
Сборник представляет интерес для школьников, занимающихся исследовательской и проектной деятельностью.
В сборник включены статьи, представленные в Оргкомитет конференции и заслушанные на конференции.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ С ПАРАМЕТРАМИ

Батурин Денис Эдуардович
Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение школа №45, 10 класс
г. Прокопьевск
Руководитель: Шейко Нина Ивановна, учитель математики МБОУ школы №45

После 11 класса мы выбираем ВУЗ по параметрам и одним из них является предмет, выбранный для сдачи на Едином Государственном Экзамене. На большинстве направлениях одним из главных предметов является профильная математика. Просматривая ЕГЭ по профильной математике, можно заметить задание под номером 18, в которых помимо переменных ***x*** и ***y*** нужно найти значение параметра ***a***. Понятие параметр было введено в науку французским философом и математиком *Рене Декартом* (1596-1650). Чтобы создать математический аппарат для изучения графиков функций, понадобилось понятие переменной величины. Именно Декарт пришел к идеям о единстве алгебры и геометрии и о роли переменных величин. Я провели анкетирование,и проанализировали его, вот что у нас получилось: на вопрос 11 классу “Будете ли вы решать задание №18 на ЕГЭ по профильной математике?” 2% ответили “Да”, 4% ответили “Попробую" и целых 94% ответили “Нет”. С 10 классами результаты были таковы: 15% ответили “Да”, 24% попробуют и 61% не будут решать. Я создал сборник, выполненный в электронном виде. Подобная форма является удобным и доступным инструментом для выработки умения оперировать с параметром, служит хорошим практическим средством для развития интереса к изучаемому, повышение мотивации, быстрым способом отработки навыка алгебраических преобразований с параметром. Сборник состоит из 15 задач (по 5 каждого метода решения). Задачи взяты из ЕГЭ начиная с 2013 по 2023 год с подробным решением. В моей работе рассмотрены часто встречающиеся виды задач с параметром, рассмотрены методы решения. И в итоге изучив интернет-ресурсы был создан сборник-тренажер задач прошлых лет, который поможет мне и другим школьникам, которые будут сдавать ЕГЭ, выполнить 18 задание на максимальный балл.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Голубев В., Гольдман А. О задачах с параметром. Первоначальные сведения. Математика-2002-№23-с.27-32;
2. Уравнения с параметрами в школьном курсе математики. - http://qplqp.narod.ru/istoria.html ;
3. Информационный источник сложной структуры “Виртуальная математика. Задачи с параметрами. 7-11 кл.”. - http://school-collection.edu.ru/catalog/rubr/df413b15-266b-4a0a-bdb228fc41140ab2/ ;
4. Графический метод в задачах с параметром - https://sigma-center.ru/graphical_method ;
5. Репетитор Евгений Пифагор - https://vk.com/shkolapifagora

СЕТЕВЫЕ ГРАФИКИ В ПЛАНИРОВАНИИ

Батюта Александр, Богулева Ульяна
Муниципальное бюджетное нетиповое общеобразовательное учреждение Гимназия №70,
11 класс
г. Новокузнецк
Руководитель: Блинова Анна Викторовна, учитель математики МБ НОУ «Гимназия №70»

Актуальность

Математическое моделирование является мощным инструментом, который позволяет нам понять и предсказывать различные явления и процессы в реальном мире. Оно находит применение во многих областях, от физики и экономики до биологии и социологии. Математическая модель может быть простой или сложной, в зависимости от того, насколько подробно она описывает систему. Она может включать в себя различные параметры, переменные и уравнения, которые отражают основные свойства и законы, действующие в системе. Математическое моделирование позволяет исследовать систему в различных условиях, проводить эксперименты и анализировать результаты. Оно также позволяет предсказывать поведение системы в будущем и оптимизировать ее работу.

В современном мире актуальной компетенцией становится умение создавать математические модели и использовать их для описания процессов.

Одним из интересных способов математического моделирования является сетевой график.

Поэтому представляется интересным освоить этот метод и найти ему практическое применение.

Проблема исследования

Многие современные подростки испытывают затруднения с организацией подготовки к ЕГЭ. Не хватает времени, нет ясного понимания почему возникают трудности. В нашем исследовании мы обозначили данную проблему и попытались найти пути ее решения. Может ли сетевой график показать максимально эффективную модель подготовки к ЕГЭ.

Гипотеза исследования

Наибольшая эффективность исследуемого процесса может быть достигнута через построение сетевого графика и использовании его для планирования проектов или отдельных взаимосвязанных работ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. М. А. Плескунов «ЗАДАЧИ СЕТЕВОГО ПЛАНИРОВАНИЯ: учебное пособие». Екатеринбург, Издательство Уральского университета, 2014. [с.8,11,22]
2. Сетевой график – Википедия. [Электронный ресурс]. – URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Сетевой_график (Дата обращения: 10.02.2024)
3. Сетевые графики в экономике. [Электронный ресурс]. – URL: https://spravochnick.ru/ekonomika_predpriyatiya/setevye_grafiki_v_ekonomike/ (Дата обращения: 12.02.2024)
4. Элементы сетевого графика. [Электронный ресурс]. – URL: https://studfile.net/preview/6264518/page:5/ (Дата обращения: 16.02.2024)

КРИПТОГРАФИЯ В МАТЕМАТИКЕ

Бачурина Злата Александровна
Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение «Средняя Общеобразовательная Школа №8 г. Горно- Алтайска им. А.Н. Ленкина»,
9 класс
г. Горно- Алтайск
Руководитель: Соколова Александра Владимировна, учитель математики

Исследование по данной теме актуально в современном мире, где информационная безопасность становится все более важной. Изучение и применение математических методов в криптографии действительно играют ключевую роль в обеспечении защиты данных.

Для достижения поставленных целей и задач исследования вам может потребовалось изучить различные математические концепции, связанные с шифрованием, такие как модулярная арифметика, теория чисел, алгебраические структуры и т.д. Также важно было ознакомиться с основными принципами работы различных видов шифров и их математическим обоснованием.

При проведении исследования было полезно изучить историю криптографии, начиная с ее древних корней и заканчивая современными методами шифрования. Рассмотрение различных видов шифров, их преимуществ и недостатков, также поможет вам лучше понять способы защиты информации.

Далее идет обзор основных терминов и исторических фактов

Криптология – наука, состоящая из двух ветвей: криптографии и криптоанализа.

Криптография – наука о способах преобразования (шифрования) информации с целью её защиты от незнакомых пользователей.

Криптоанализ – наука (и практика её применения) о методах и способах вскрытия шифров.

Разработкой методов преобразования (шифрования) информации с целью её защиты от незаконных пользователей занимается криптография. Такие методы и способы преобразования информации называются шифрами.

Шифрование (зашифрование) – применение шифра к защищаемой информации, т.е. преобразование защищаемой информации (открытого текста) в шифрованное сообщение (шифртекст, криптограмму) с помощью определённых правил, содержащихся в шифре.

Дешифрование – процесс, обратный шифрованию, т.е. преобразование шифрованного сообщения в защищаемую информацию с помощью определённых правил, содержащихся в шифре.

Проблема защиты информации путем ее преобразования, исключающего ее прочтение посторонним лицом, волновала человеческий ум с давних времен. История криптографии – ровесница истории человеческого языка. Более того, первоначально письменность сама по себе была криптографической системой, так как в древних обществах ею владели только избранные. Священные книги древнего Египта, древней Индии тому примеры. С широким распространением письменности криптография стала формироваться как самостоятельная наука.

На практике были рассмотрены различные виды шифров.

Пример 1.

Стандартный шифр ROT1. Этот шифр известен многим детям. Ключ прост: каждая буква заменяется на следующую за ней в алфавите. Так, А заменяется на Б, Б — на В, и т. д.

«Математик — это человек, который не только сразу же схватывает чужую мысль, но также видит, из какой логической ошибки она вытекает.

Хельмут Нар». Эту цитату я решила зашифровать через шифр ROT1.

«Нбуёнбуйл — юуп шёмпгёл, лпупськ оё упмэлп тсбиф зё тцгбуьгбёу шфзфя ньтмэ, оп ублзё гйейу, йи лблпк мпдйшётлпк пщйвлй поб гьуёлбёу. Цёмэнфу Обс».

Чтобы дешифровать шифр нужно совершить процесс, обратный шифрованию, т.е. преобразование шифрованного сообщения в защищаемую информацию. Т.е. я заменила букву “м” на “н”, “а” на “б” и т.д.

Пример 2.

Шифр A1Z26. Алфавит по цифрам. Это простая подстановка, где каждая буква заменена её порядковым номером в алфавите. Только нижний регистр. Возьмём туже цитату.

«Математик — это человек, который не только сразу же схватывает чужую мысль, но также видит, из какой логической ошибки она вытекает. Хельмут Нар».

14-1-20-6-14-1-20-10-12 — 31-20-16 25-6-13-16-3-6-12, 12-16-20-16-18-29-11 15-6 20-16-13-30-12-16 19-18-1-9-21 8-6 19-23-3-1-20-29-3-1-6-20 25-21-8-21-32 14-29-19-13-30, 15-16 20-1-12-8-6 3-10-5-10-20, 10-9 12-1-12-16-11 13-16-4-10-25-6-19-12-16-11 16-26-10-2-12-10 16-15-1 3-29-20-6-12-1-6-20. 23-6-13-30-14-21-20 15-1-18.

Чтобы дешифровать шифр нужно каждую букву заменить своим порядковым номером в алфавите. Это стандартные шифры, их расшифровку легко найти в интернете, так же легко как и зашифровать какой-либо текст.

Пример 3.

Возьмём шифр посложнее, а именно Квадрат Полибия. (Рис.1)

Квадрат Полибия

	1	2	3	4	5	6
1	А	Б	В	Г	Д	Е
2	Ё	Ж	З	И	Й	К
3	Л	М	Н	О	П	Р
4	С	Т	У	Ф	Х	Ц
5	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь
6	Э	Ю	Я	-	-	-

Рис.1. Квадрат Полибия

На это раз возьмём новую цитату. «В математике нет символов для неясных мыслей. Анри Пуанкаре». Получим шифр:

«13 32 11 42 16 32 11 42 24 26 16 33 16 42 41 24 32 13 34 31 34 13 15 31 63 33 16 63 41 33 55 45 32 55 45 32 55 41 31 16 25».

Самое ценное в исследовании – применение шифра РСА. Его изучают в курсе криптологии в различных вузах, он показался нам наиболее любопытным, а в силу своей ассиметричности – сложным для взлома.

Функция Эйлера — арифметическая функция, значение которой равно количеству натуральных чисел, меньших либо равных и взаимно простых с ним. Взаимно простыми называются числа, которые не имеют общих делителей, отличных от 1. Так как делителями нуля являются все натуральные числа, то 0 взаимно прост только с 1.

Для генерации ключей в алгоритме RSA необходимо выполнить следующие шаги:

1. Выбрать два простых числа p и q.
2. Вычислить их произведение $n = p \cdot q$, которое будет использоваться в качестве модуля для шифрования и дешифрования.

3. Вычислить значение функции Эйлера от числа n по формуле $\varphi(n) = (p-1)\cdot(q-1)$
4. Выбрать целое число e, которое является взаимно простым с $\varphi(n)$ и меньше $\varphi(n)$.
5. Вычислить число d, обратное к числу e по модулю $\varphi(n)$, то есть
$$(\mathrm{d} * \mathrm{e}) \bmod \varphi(\mathrm{n}) = 1.$$
6. Полученные значения (e,n) составляют публичный ключ, который распространяется всем пользователям, а (d,n) – приватный ключ, который хранится в секрете.

Для шифрования сообщения m с помощью публичного ключа (e,n) используется формула $C_i = T_i^e \bmod n$, где – зашифрованное сообщение.

Для дешифрования зашифрованного сообщения с с помощью приватного ключа (d,n) используется формула $m = c^d \bmod n$, где m – исходное сообщение.

Пример 1. Пусть $p = 7, q = 13$.

1. $n = p\cdot q = 7\cdot 13 = 91$
2. Функция Эйлера: $\varphi(n) = (p-1)\cdot(q-1) = 72$
3. Выбираем целое – открытый ключ.
4. D – целое число $(\mathrm{d}\cdot\mathrm{e}) \bmod \varphi(\mathrm{n}) = 1$.

Функция Mod вычисляет остаток от целочисленного деления двух чисел.
$$d = \frac{k\cdot\varphi(n)+1}{e}$$
Подберём k последовательно от $1, 2, 3$ ... до тех пор пока d не будет целым.
$$d = (2\cdot 72 + 1): 5 = 29 \text{ при } k = 2, d = 29,$$
$$(d,n) = (29{,}91) - \text{ закрытый ключ}$$

5. $C_i = T_i^e \bmod n$, где T_i – исходное сообщение, C_i- зашифрованное сообщение.
6. Составим таблицу.

Таблица 1 - Числовые эквиваленты русских букв, цифр и символа пробела

									0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3

4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4
										пробел										

Таблица 2 – Вычисление шифрограммы

Символы исходного сообщения, T_i	Коды символов T_i	Зашифрованные коды символов C_i
З	9	$9^5 \bmod 91 = 81$
Л	13	$13^5 \bmod 91 = 13$
А	1	$1^5 \bmod 91 = 1$
Т	19	$20^5 \bmod 91 = 76$
А	10	$1^5 \bmod 91 = 1$

Таким образом, мы исходное сообщение «ЗЛАТА» представили в виде шифрограммы «81, 13, 1, 76, 1».

Дешифровка.

Расшифровка RSA-закодированного сообщения T выполняется с помощью закрытого ключа получателя (d, n) по формуле $T_i = C_i^d \ mod \ n$.

Рассмотрим пример восстановления исходного сообщения. В предыдущем примере была получена пара ключей и шифрограмма «$81, 13, 1, 76, 1$», созданная открытым ключом данной пары. Воссстановим исходное сообщение, применив закрытый ключ $(d, n) \ = \ (29, 91)$ той же пары.

Составим таблицу.

Таблица 3 – Восстановление сообщения

Зашифрованные коды символов C_i	Дешифрованные коды символов T_i	Символы исходного сообщения, T_i
81	81^{29}mod 91 = 9	З
13	13^{29}mod 91 = 13	Л
1	1^{29}mod 91 = 1	А
76	76^{29}mod 91 = 20	Т
1	1^{29}mod 91 = 1	А

Таким образом, мы восстановили исходное сообщение «ЗЛАТА».

Пример 2.

1)$p = 5, \ q = 11$

2) $n \ = \ p \cdot q = 5 \cdot 11 = 55$

3) $\varphi(n) \ = \ (p-1)(q-1) = (5-1)(11-1) = 40$

4) $e\colon \ 0 \ < \ e \ < \ n$, где $e = 3$, где $(e, n) = (3{,}55) -$ открытый ключ.

5)

$$d = \frac{k \cdot \varphi(n) + 1}{e}$$

$$d = (2 \cdot 40 + 1)\colon 3 = 27\,, \qquad \text{при } k = 2, d = 27$$

$$(d, n) = \ (27{,}55) \text{ закрытый ключ}$$

6) $C_i = T_i^e \ mod \ n$

Возьмём такую цитату: «Математика гимнастика для ума». Составим таблицу.

Таблица 4 – Вычисление шифрограммы.

Символы исходного сообщения, T_i	Коды символов T_i	Зашифрованные коды символов C_i
М	14	14^5mod 91 = 49
А	1	1^5mod 91 = 1
Т	20	20^5mod 91 = 25
Е	6	6^5mod 91 = 51
И	10	10^5mod 91 = 10
К	12	12^5mod 91 = 23
Г	4	4^5mod 91 = 9
Н	15	15^5mod 91 = 20
С	19	19^5mod 91 = 39
У	21	21^5mod 91 = 21
ПРОБЕЛ	34	34^5mod 91 = 34

«49, 1,25, 51, 49, 1, 25, 10, 23, 1, 34, 9, 10, 49, 20, 1, 39, 25, 10, 23, 1, 34, 21, 49, 1».

Дешифровку проведем с помощью формулы $T_i = C_i^d \ mod \ n$. Составим таблицу.

Таблица 5 – Восстановление сообщения.

Зашифрованные коды символов C_i	Дешифрованные коды символов T_i	Символы исходного сообщения, T_i
49	49^{27}mod 55 = 14	М
1	1^{27}mod 55 = 1	А
25	25^{27}mod 55 = 20	Т
51	51^{27}mod 55 = 6	Е
10	10^{27}mod 55 = 10	И
23	23^{27}mod 55 = 12	К
9	9^{27}mod 55 =4	Г
20	20^{27}mod 55 = 15	Н
39	39^{27}mod 55 = 19	С
21	21^{27}mod 55 = 21	У
34	34^{27}mod 55 = 34	ПРОБЕЛ

В теории криптографии существует несколько задач. В данной работе рассмотрена одна из самых главных задач криптографии: обеспечение конфиденциальности. Если данная проблема решена, значит защита информации обеспечена.

Исследовательская работа включает в себя историю криптографии, обзор некоторых видов шифров, в особенности те виды, где применяется математика. С помощью шифра RSA была осуществлена шифровка и дешифровка текста. При работе с этими шифрами не обойтись без математических методов, в частности, алгебры, теории чисел, теории алгоритмов, теории вероятностей и математической статистики, поиска закономерностей, сравнения и многих других.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шмидт, О.Ю. Взаимно простые числа / О. Ю. Шмидт // Большая советская энциклопедия — гл. ред. О. Ю. Шмидт. — М. : Советская энциклопедия, 1926-1947. — 273 с.
2. Михелови, Ш. Х. Теория чисел / Ш. Х. Михелови. — 2-е изд. — М.: Высшая школа, 1967. — 336 с.
3. Ященко, В.В. Введение в криптографию / под общ. ред. В.В. Ященко — М.: МЦНМО, 2012. — 248 с.
4. Баричева, С.Г. Основы современной криптографии / С.Г. Баричева, В.В Гончарова, Р.Е. Серова ; — М.: Издательский центр «Академия», 2008. — 272 с.
5. Алферова А.П. Основы криптографии / А.П. Алферова, А.Ю. Зубова, А.С. Кузьмина, А.В. Черемушкина ; учебное пособие, 2-е изд., испр. и доп. — М.. Гелиос АРВ, 2002. — 480 с.
6. Ложкин, П.А. Как дискретная математика связана с криптографией? / П.А. Ложкин — Международный студенческий научный вестник —2018. – № 3 (часть 1) — С. 101-103

ПРИМЕНЕНИЕ НЕКОТОРЫХ МАЛОИЗВЕСТНЫХ ТЕОРЕМ ГЕОМЕТРИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СЛОЖНЫХ ЗАДАЧ

Баянова Ксения Андреевна

Областное бюджетное общеобразовательное учреждение «Томский физико-технический лицей»,

11 класс

Руководитель: Деревцова Елена Викторовна, учитель математики ОГБОУ «ТФТЛ»

Каждый старшеклассник желает успешно сдать экзамены и поступить в хороший вуз. Все мы знаем, что большую трудность на ЕГЭ по профильной математике и олимпиадах представляют планиметрические задачи. Часто эти задачи можно решить, зная определенные теоремы, которые в школьном курсе недостаточно освещены либо вообще не затрагиваются. Поэтому для меня стал *актуальным* вопрос изучения таких теорем и свойств, которые помогут мне в решении задач. Однако, рассматривая разные источники, я не нашла такого, где были бы собраны основные из них. Поэтому *проблема*, которую я ставлю в ходе реализации моего проекта – это создание ресурса для повышения образовательного уровня учащихся по геометрии для решения задач повышенной сложности.

Цель: создание электронного пособия «Применение некоторых малоизвестных теорем геометрии для решения сложных задач».

Задачи: изучить некоторые теоремы, используемые при решении заданий ЕГЭ и олимпиад.; сформировать банк задач для отработки теории; систематизировать материал в виде электронного пособия; апробировать пособие на учениках 11 б класса ТФТЛ.

Проанализировав информацию с сайтов и сборников задач ЕГЭ и олимпиад прошлых лет, я выбрала некоторые теоремы, которые применяются при их решении, а также довольно интересны и просты для запоминания. Это теоремы Стюарта, Вариньона, Дезарга и другие. В результате работы над проектом мной было создано пособие «Применение некоторых малоизвестных теорем геометрии для решения сложных задач».

Мой проект включает в себя выбранные теоремы, их доказательства, свойства и следствия. Также по каждой теме есть олимпиадные задачи и задачи из ЕГЭ по планиметрии для самопроверки. Пособие представлено в виде презентации.

Работа должна помочь школьникам подготовиться к экзаменам и олимпиадам, лучше понять геометрию и узнать новые способы решения задач.

Эта информация пригодилась мне для решения задач ЕГЭ по профильной математике и при подготовке к олимпиадам. Также я представила свою работу одноклассникам. Они оценили удобство и пользу моего пособия.

Исходя из этого можно сделать **вывод**, что созданное мною пособие является ресурсом для повышения образовательного уровня обучающихся по геометрии и поставленная мною в ходе реализации проекта проблема решена.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коксетер Г. С. М., Грейтцер С. Л. Новые встречи с геометрией. — Москва: Изд-во: Наука, 1978 — 224 с.
2. Прасолов В. В. Задачи по планиметрии: Учебное пособие. — 5 изд., испр. и доп. — М.: МЦНМО ОАО “Московские учебники”, 2006 — 640 с.
3. Решение задач по теореме Эйлера, прямой Эйлера, окружности Эйлера: [Электронный ресурс] UPL: http://sch92.minsk.edu.by/ru/main.aspx?guid=34951

4. Теорема Стюарта и применение её для решения задач / Помелов Н.В. // Юный ученый. — 2016, 06 фев. — N 2 (5) UPL: https://moluch.ru/young/archive/5/266/
5. Применение теоремы Вариньона к решению задач: [Электронный ресурс] UPL: https://pandia.ru/text/78/064/100191.php
6. Интернет-проект «Задачи», — © 2004 МЦНМО: [Электронный ресурс] UPL: https://problems.ru/view_by_subject_new.php?parent=423&start=22&viewing_params[view_docs]=1111
7. Теорема Дезарга и ее применение к решению задач из курса школьной геометрии: [Электронный ресурс] UPL: https://doc4web.ru/matematika/teorema-dezarga-i-eyo-primenenie-k-resheniyu-zadach-iz-kursa-shk.html

ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ ФИЗИЧЕСКОЙ ВЕЛИЧИНЫ «УГОЛ ЕСТЕСТВЕННОГО ОТКОСА»

Бирюкова Александра Дмитриевна
МАОУ СОШ № 50,
11 класс
г.Томск
Руководитель: Вологжанина Елена Ивановна, преподаватель математики, ТУСУР

Важной характеристикой сыпучих материалов является угол естественного откоса. Угол естественного откоса φ – это угол, образованный горизонтальной плоскостью и плоскостью естественного откоса сыпучего материала или угол между плоскостью основания и образующей конуса, получающегося при свободном падении сыпучего материала на горизонтальную плоскость [1]. Он определяет, будет ли масса материала двигаться в потоке под действием силы тяжести или для перемещения понадобятся внешние силы; определяет минимальные углы ската для гравитационного потока.

Актуальность

Угол естественного откоса необходимо знать при проектировании складов, бункеров, транспортирующих и погрузочно- разгрузочных устройств [2, 10], По углам естественного откоса определяются максимально допустимые углы откосов уступов и бортов карьеров, насыпей, отвалов и штабелей, транспортных лент.

В разных источниках информации приведены разные значения *φ* для одного и того же материала. Это объясняется различными методами измерения *φ,* различными условиями измерения и различными свойствами подобных материалов (н-р, разная влажность сыпучего материала влияет на значение *φ).* Иногда требуется быстрое определение угла естественного откоса, с учетом того, что точностью на первом этапе можно пренебречь. На выявление методов «экспресс-определения» φ, применимости максимально простого математического аппарата и определения практического применения и значимости угла естественного откоса направлено это исследование.

Цель проекта: показать практическое применение математического аппарата на примере определения угла естественного откоса сыпучих веществ.

Задачи проекта:

1. Познакомиться с физикой сыпучих веществ. Выявить материалы, для которых значение φ имеет практическое применение, но редко встречается в исследованиях.
2. Провести эксперимент по измерению параметров горки из сыпучих веществ.

3. Рассчитать углы естественного откоса сыпучих веществ несколькими способами.
4. Выявить практические области применения угла естественного откоса.
5. Сделать выводы.

Объектом исследования стали сыпучие вещества: рис круглозерный, рис длиннозерный, гречка, манка, овёс, семена укропа, хвоя ели, спички.

Гипотеза: для быстрого определения угла естественного откоса сыпучего материала имеются простые методы, можно применять «легкий» математический аппарат.

Методы исследования: анализ научной и исследовательской литературы, эксперимент, вычисления, размышление, обобщение.

Справочные данные об углах естественного откоса для одних и тех же насыпных грузов в разных источниках существенно отличаются друг от друга, так как замеры углов производятся различными методами и при разном исходном состоянии исследуемого материала. Величина угла естественного откоса сыпучих веществ зависит от формы, размера, шероховатости и однородности частиц материала, влажности, массы, способа его отсыпки, исходного состояния и материала опорной поверхности. В источниках [3-8] приводятся экспериментальные данные для некоторых сыпучих веществ. Мы свели информацию из разных источников, в том числе из публикаций школьников, в таблицу 1. В результате исследования было обнаружено, что в источниках не встречаются значения φ для семян укропа, хвои и спичек.

Таблица 1

Угол естественного откоса сыпучих материалов из разных источников информации

Сыпучий материал	Угол откоса	Источник информации	Сыпучий материал	Угол откоса	Источник информации
Рис	32	3	Соль	26	3
	23–33	6		40	8
Мука	33–45	4	Песок	36	3
	45–50	7		21–30	4
	40	8		30	8
Сахар	33,5	3	Гречка	37	3
	25–33	4		19–27	4
	35–38	5		29–32	5
	35	8			

Эксперимент по определению угла естественного откоса

Для проведения эксперимента мы взяли следующие вещества: круглозерный рис, длиннозерный рис, гречка, манка, овес, семена укропа, хвоя ели, спички. Объём веществ одинаков и равен 250 мл, $2{,}5 \cdot 10^{-4}$м^3. Насыпание горки мы проводили вручную от поверхности стола с медленным поднятием емкости на уровне горки (насыпание спичек и хвои мы делали щепотками, без емкости). Измерения диаметра горки проводили с помощью штангенциркуля пять раз, брали среднее значение. Измерение высоты – с помощью зубочистки, измерение длины наклона – с помощью линейки пять раз. Проанализировав доступную информацию, мы остановились на четырех способах расчета.

Способ расчета № 1. Измерили несколько раз диаметр конуса *d* штангенциркулем. Вычислили радиус по формуле $r = d/2$. Из формулы объёма конуса вычислили высоту воронки $h = 3V/(3{,}14 * r^2)$. Вычислили тангенс угла откоса $\mathrm{tg}\varphi = h/r$. По таблице тангенсов нашли угол φ.

Способ расчета № 2. Измерили несколько раз диаметр конуса *d* штангенциркулем. Вычислили радиус по формуле $r = d/2$. Измерили высоту горки *h.* Вычислили тангенс угла откоса $\mathrm{tg}\varphi = h/r$. По таблице тангенсов нашли угол φ.

Способ расчета № 3. Измерили несколько раз диаметр конуса *d* штангенциркулем. Вычислили радиус по формуле $r = d/2$. Измерили длину наклона горки *l.* Вычислили косинус угла откоса $\cos\varphi = r/l$. По таблице косинусов нашли угол φ.

Способ расчета № 4. Измерили несколько раз диаметр конуса *d* штангенциркулем. Вычислили радиус по формуле $r = d/2$. Измерили высоту горки *h.* По теореме Пифагора вычислили длину наклона горки *l.* Вычислили косинус угла откоса $\cos\varphi = r/l$. По таблице косинусов нашли угол φ.

Результаты измерений и расчетов представляем в таблицах 2 и 3.

Таблица 2

Угол естественного откоса сыпучих материалов, вычисленный способами №1 и №2

	Способ расчета № 1.					Способ расчета № 2.				
Материал	*d*, м	*r*, м	*h* расчётноё, м	tg φ	$\boldsymbol{\varphi}$	*d*, м	*r*, м	*h*, м	tg φ	φ
Рис круг.	0,124	0,0620	0,0621	1,0022	**45**	0,124	0,0620	0,04	0,6452	**33–34**
Рис длин.	0,135	0,0675	0,0524	0,7766	**37–38**	0,135	0,0675	0,042	0,6222	**31–32**
Гречка	0,133	0,0665	0,0540	0,8122	**39–40**	0,133	0,0665	0,035	0,5263	**27–28**
Манка	0,130	0,0650	0,0565	0,8697	**41**	0,130	0,0650	0,044	0,6769	**34–35**
Овёс	0,150	0,0750	0,0425	0,5662	**29–30**	0,150	0,0750	0,035	0,4667	**25**
Укроп сем	0,150	0,0750	0,0425	0,5662	**29-30**	0,150	0,0750	0,044	0,5867	**30-31**
Спички	0,130	0,0650	0,0565	0,8697	**41**	0,130	0,0650	0,054	0,8308	**39-40**
Хвоя ели	0,115	0,0575	0,0722	1,2564	**51-52**	0,115	0,0575	0,052	0,9043	**42-43**

Таблица 3

Угол естественного откоса сыпучих материалов, вычисленный способами №3 и №4

	Способ расчета № 3					Способ расчета № 4					
Материал	*d*, м	*r*, м	*l*, м	cos φ	$\boldsymbol{\varphi}$	*d*, м	*r*, м	*h*, м	*l* рас-четная	cos φ	$\boldsymbol{\varphi}$
Рис круг.	0,124	0,062	0,066	0,9394	**20–21**	0,124	0,062	0,040	0,0738	0,8403	**32–33**
Рис длин.	0,135	0,067	0,070	0,9643	**15–16**	0,135	0,067	0,042	0,0795	0,8491	**31–32**
Гречка	0,133	0,066	0,075	0,8867	**28–29**	0,133	0,066	0,035	0,0751	0,8849	**27–28**
Манка	0,130	0,065	0,080	0,8125	**35–36**	0,130	0,065	0,044	0,0785	0,8281	**34–35**
Овёс	0,150	0,075	0,081	0,9259	**22–23**	0,150	0,075	0,035	0,0828	0,9062	**25**
Укроп сем.	0,150	0,075	0,080	0,9375	**20-21**	0,150	0,075	0,044	0,0870	0,8625	**30-31**
Спички	0,130	0,065	0,090	0,7222	**43-44**	0,130	0,065	0,054	0,0845	0,7692	**39-40**
Хвоя ели	0,115	0,057	0,090	0,6389	**50-51**	0,115	0,057	0,052	0,0775	0,7417	**42-43**

Значения φ круглозерного и длиннозерного риса, гречки, манки и овса подобны значениям, представленным в источниках информации [3-8]. Значения φ укропа, спичек и хвои ели сравнить с данными других авторов не удалось ввиду отсутствия таковых.

Практические области применения угла естественного откоса

Знание величины угла естественного откоса необходимо во многих сферах народного хозяйства от фармацевтики до угольно-добывающей отрасли. В проекте мы провели обобщение областей применения φ и представляем их в таблице 4.

Таблица 4

Практическое применение знания значений угла естественного откоса

Отрасль	Угол естественного откоса (применение)	Источники
Горная промышленность и разработка карьеров	– определяет устойчивость и безопасные углы наклона выкопанных материалов, таких как руды, уголь, минералы и заполнители; – определяет наибольшую крутизну плоских откосов земляных сооружений, траншей и котлованов, устраиваемых без креплений. При обеспечении естественной крутизны откосов обеспечивается устойчивость земляных насыпей и выемок, содействует предотвращению оползней на угольных отвалах, и, как следствие, минимизируется экологический ущерб; – определяет наибольшие углы наклона ленточных конвейеров при транспортировании сыпучих грузов на подъем, ширину лент; – закономерности угла естественного откоса руд разных фракций в движении полезны при проектировании наклонного ленточного устройства для разделения строительных сыпучих материалов; – применяют при расчетах моделировании работы экскаватора на рудниках; – применяют при проектировании и моделировании систем разработки рудных месторождений.	9, 10, 11, 12, 17, 18
Строительство и гражданское строительство	– важен для проектирования откосов, насыпей, подпорных стенок, дамб и плотин. Это помогает инженерам понять стабильность почвы, камней и других сыпучих материалов, чтобы предотвратить оползни или обрушения; – закономерности угла естественного откоса руд разных фракций в движении полезны при проектировании наклонного ленточного устройства для разделения строительных сыпучих материалов.	9, 13
Сельское хозяйство и пищевая промышленность	– важен при обращении и хранении сельскохозяйственной продукции, такой как зерно, семена и порошкообразные вещества, такие как мука. Это влияет на конструкцию силосов, бункеров, сушильных аппаратов и конвейерных систем, используемых на предприятиях пищевой промышленности и хранения.	9, 14, 15
Фармацевтическая и химическая промышленности	– помогает при проектировании оборудования, такого как: бункеры, смесители и питатели, для обеспечения эффективной и надежной обработки материалов, ибо в этих отраслях часто транспортируются, хранятся и перерабатываются гранулированные материалы, порошки и химикаты.	9

Отрасли, занимающиеся транспортировкой и хранением сыпучих материалов (производство и логистика)	– помогает для оптимизации потока материалов, предотвращения засоров и повышения операционной эффективности; – применяется при расчетах характеристик доменных печей в металлургии; – применяется при алгоритмизации и моделировании процессов, происходящих в сыпучих материалах; – важен при проектировании скользящих труб в системе транспортировки сыпучих материалов, угла наклона стенок бункера, который должен быть на 10–15 ° больше φ груза для того, чтобы у стенок воронки не образовывалась пассивная зона, в пределах которой груз в начале разгрузки остается неподвижным, затем располагается по углу естественного откоса, а затем скользит вдоль стенок бункера.	9, 20
Геотехническая инженерия, строительство дорог, геология	– важен при геотехнических исследованиях, особенно при оценке устойчивости склонов, насыпей и естественных форм рельефа, при формировании и строительстве склонов и насыпей. Это помогает определить вероятность оползней и безопасно спроектировать конструкции на склонах; – оценка и мониторинг песчаных дюн и гранулированных формаций.	9, 16
Порошковые технологии (фармацевтика, косметика, химия)	– играет роль в характеристике сыпучести и свойств порошков в обращении, помогая оптимизировать процесс; – применяется при определении степени сыпучести материала (для хорошо сыпучих материалов φ колеблется в пределах 25-30º, а для связных материалов – 60-70º).	9, 19
Спорт и отдых	– учитывается при проектировании горнолыжных склонов, сноубордических парков и трасс вело- и мотокроссов. Это помогает определить подходящий уклон склона для безопасного и приятного отдыха; –помогает прогнозировать риск оползней в горной местности.	9

Одной из значимых особенностей сыпучих материалов исследователи выделяют «устойчивость» горки, которая является максимальной, если формировать насыпь, соблюдая (не превышая и не занижая) угол естественного откоса сыпучего материала.

Заключение

В результате проведенных нами экспериментальных исследований рассчитаны величины φ для сыпучих материалов, значение φ для которых редко или почти не встречается в источниках информации:

- семена укропа (φ = 21-30°),
- хвоя ели (φ = 43-51°)
- спички (φ =40-43°).

Полученные значения могут применяться при проектировании транспортеров, систем хранения и переработки этих материалов.

В результате сравнения четырех способов расчета φ: второй и четвертый способ дали похожие результаты (четвертый способ является производным от второго). Расчётный φ, полученный способами №№2 и 4 в большей степени коррелирует с данными, получаемыми другими авторами и, по материалу «гречка» - со способом №3. Таким образом, можно сделать вывод: для практического применения математического аппарата необходимо использовать несколько способов и затем выбрать менее трудоемкий, но более точный. В нашем случае – способ № 2.

Предложенные способы включают в себя простой эксперимент и «лёгкий» математический аппарат и могут быть использованы при экспресс определении φ, на знании значения которого решаются серьёзные инженерные задачи.

Нами обобщены области применения знания значений угла естественного откоса сыпучих материалов. Обнаружено, что имеется множество способов измерения φ, включая различные методы (в т.ч. в покое и в движении - в покое φ больше, чем в движении [13]), и множество приборов и приспособлений измерения угла естественного откоса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бойцов Ю.А. Исследование внутреннего и внешнего трения сыпучих грузов: Метод. указания к лабораторной работе для студентов спец.170600. – СПб.: СПбГУНиПТ, 2003. – 10с.
2. Угол естественного откоса. – URL: https://studfile.net/preview/7011908/page:5/ (дата обращения: 24.02.2024).
3. Лосик А. С. Конические горки. Г.Червень. Беларусь 2018. 7 стр. – URL: http://nauka-it.ru/attachments/article/4217/lusik_26_12_2018_marafon.pdf (дата обращения: 24.02.2024).
4. Щевровский А.В. Исследовательский проект: Сыпучая горка 2019 – URL: https://nsportal.ru/ap/library/drugoe/2021/07/01/proektno-issledovatelskaya-rabota-sypuchaya-gorka (дата обращения: 24.02.2024).
5. Шопин, И. А. Исследование параметров образования конуса при насыпании нелипких гранулированных материалов // ЛУЧШИЕ НАУЧНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ студентов и УЧАЩИХСЯ: сборник статей IV Международной научно-практической конференции, Пенза, 15 августа 2023 года. – Пенза: Наука и Просвещение (ИП Гуляев Г.Ю.), 2023. – С. 8-13. – URL: https://elibrary.ru/download/elibrary_54304466_46336953.pdf (дата обращения: 24.02.2024).
6. Угол естественного откоса зерна. – URL:https://www.grainsilo.ru/grain-technology-update/angle-of-repose-of-grain.html (дата обращения: 24.02.2024).
7. Нормы технологического проектирования мельничных предприятий. Москва 1991. – URL: https://www.standartov.ru/norma_doc/9/9792/ (дата обращения: 24.02.2024).
8. Инженерный справочник. Плотность насыпная - нормативный объемный вес угол естественно откоса в градусах, коэффициенты трения по бетону и по стали основных сыпучих материалов. – URL: https://dpva.ru/Guide/GuidePhysics/GuidePhysicsDensity/PlotnostUgolOtkosaTreniyaSypuchihMaterialov/ (дата обращения: 24.02.2024).
9. Material Nesting Expert. Angel of Repose. – URL: https://www.materialtestingexpert.com/aggregate/angle-of-repose (дата обращения: 24.02.2024).
10. СНиП 2.05.07-91*. – URL: https://pozhproekt.ru/nsis/Snip/Pril/2-05-07-91_06pr.htm (дата обращения: 24.02.2024).
11. Угол естественного откоса. Буровая системная компания. Буровые установки. – URL: https://www.drillings.su/ugol-otkosa.html (дата обращения: 24.02.2024).

12. Мухина А.С. Геоэкологическое обоснование рекультивации внешних отвалов при разработке угольных месторождений Кузбасса: дис. … канд. тех. наук 25.00.64/ А.С. Мухина. – СПб., 2022. – 174 с.
13. Перепелкин М.А., Перепелкина С.В. Исследование угла естественного откоса строительных и рудных материалов при проектировании и разработке строительно-дорожных, горных машин и оборудования // Горная промышленность. – 2017. – №4. – С.86-87.
14. Субботин М.Ю. Влияние зависимости угла естественного откоса сыпучего материала от его влажности на конструкцию сушильных аппаратов // Вестник Забайкальского государственного университета. 2013. № 1 (92). С. 39-45.
15. Тишанинов Н.П., Анашкин А.В., Тишанинов К.Н., Альшинайиин Х.Д.Д. Исследования угла естественного откоса компонентов зерносмеси // Наука в центральной России. – 2020. – № 5(47). – С. 31-41.
16. Hamzah M. Beakawi Al-Hashemi Omar S.Baghabra Al-Amoudi. A review on the angle of repose of granular materials // Powder Technology 330. – 2018 – 397-417pp. Available from: https://www.researchgate.net/publication/323441895_A_review_on_the_angle_of_repose_of_granular_materials [accessed Mar 06 2024].
17. Кузнецов, Д. В. Открытая разработка угольных и рудных месторождений: учеб,пособие / Д. В. Кузнецов, Ю. В. Ромашкин. - Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 2022. - 180 с.
18. Рыжков, Ю. А. Вариант системы с подэтажной отбойкой и этажным выпуском руды при отработке мощных крутопадающих рудных тел с образованием разделительных целиков / Ю. А. Рыжков, И. А. Ермакова // Горный информационно-аналитический бюллетень. – 2001. – № 11. – С. 94-97.
19. Миллер Е.С. Совершенствование процесса структурообразования многокомпонентных инстант-напитков в гранулированном виде: дис. … канд. тех. наук 4.3.3/ Е.С. Миллер. – Кемерово, 2023. – 152 с.
20. Углы откоса и прочие факторы распределения материалов на колошнике – URL: https://metal-archive.ru/domennyy-process/2083-ugly-otkosa-i-prochie-faktory-raspredeleniya-materialov-na-koloshnike.html (дата обращения: 06.03.2024

РАЗРАБОТКА НАГЛЯДНЫХ ПОСОБИЙ ДЛЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ ПИФАГОРА

Бобровникова Анастасия Дмитриевна
Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение «Средняя Общеобразовательная Школа №8 г. Горно- Алтайска им. А.Н. Ленкина», 8 класс
г. Горно- Алтайск
Руководитель: Соколова Александра Владимировна, учитель математики

Тема является актуальной в силу того, что теоремы Пифагора является одной из основной в курсе геометрии 8 класса, наглядные пособия для ее доказательства помогают понять суть теоремы. Труды Пифагора до сих пор актуальны, ведь куда бы мы ни посмотрели, везде можно увидеть плоды его великих идей, воплощенные в различные отрасли современной жизни.

Цель исследования: повысить интерес среди учащихся к изучению теоремы Пифагора.

Задачи:
– изучить историческую справку и теорию по теме;
– найти и рассмотреть несколько способов доказательства теоремы Пифагора;
– разработать наглядные пособия для доказательства теоремы Пифагора;

–сделать интерактивный макет для демонстрации доказательства теоремы Пифагора в 8 классе.

Исследование началось с обзора некоторых исторических фактов.

Пифагор Самосский, древнегреческий философ и математик, родился в 580 г. до н.э. на острове Самос. В своей жизни он учился у различных учителей, путешествовал, изучал науки в Египте и Вавилоне, а затем основал свою школу в городе Кротоне.

Пифагор оставил значительное наследие в области математики, философии и религии, и его учение продолжает вдохновлять ученых и мыслителей по всему миру до сегодняшнего дня.

Теорема Пифагора была известна задолго до Пифагора и даже до его времени. Она была использована в различных культурах и цивилизациях, таких как древний Египет, Вавилон, Индия и другие. В разных источниках упоминается, что эта теорема была известна египтянам еще около 2300 года до н.э., а также в Вавилоне в период правления Хаммураби.

Далее были рассмотрены способы доказательства теоремы Пифагора.

Древнекитайское доказательство.

На древнекитайском чертеже четыре равных прямоугольных треугольника с катетами $a,\ b$ и гипотенузой с уложены так, что их внешний контур образует квадрат со стороной $a+b$, а внутренний – квадрат со стороной с, построенный на гипотенузе (Рис.1).

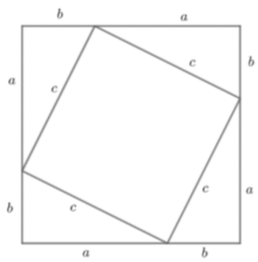


Рис.1

$$\mathrm{a}^2 + 2ab + b^2 = \mathrm{c}^2 + \frac{ab \cdot 4}{2}$$

$$\mathrm{a}^2 + 2ab + b^2 = \mathrm{c}^2 + 2ab$$

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Доказательство Евклида.

Это доказательство было приведено Евклидом в его "Началах". По свидетельству Прокла (Византия), оно придумано самим Евклидом. Доказательство Евклида приведено в предложении 47 первой книги "Начал". На гипотенузе и катетах прямоугольного треугольника ABC строятся соответствующие квадраты и доказывается, что прямоугольник BJLD равновелик квадрату ABFH, а прямоугольник JCEL - квадрату AGKC. Тогда сумма площадей квадратов на катетах будет равна площади квадрата на гипотенузе.

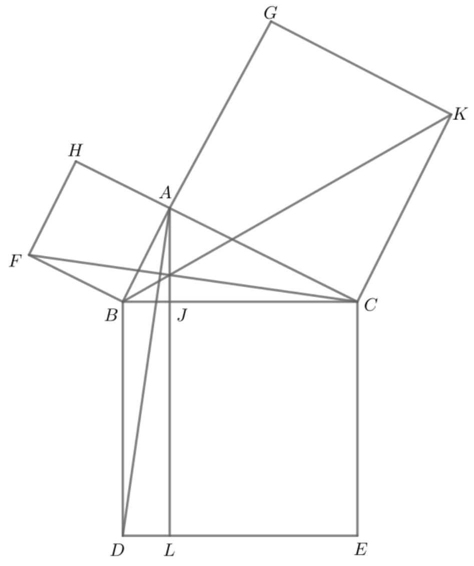


Рис. 2

В самом деле, треугольники ABD и BFC равны по двум сторонам и углу между ними: FB = AB, BC = BD, а углы между ними равны как тупые углы со взаимно перпендикулярными сторонами. $S_{ABD} = 0{,}5S_{BJLD}$, так как у треугольника ABD и прямоугольника BJLD общее основание BD и общая высота LD (Рис.2).

Аналогично $S_{FBC}=0{,}5S_{ABFH}$ (BF-общее основание, AB - общая высота) . Отсюда, учитывая, что $S_{ABD}=S_{FBC}$, имеем $S_{BJLD}=S_{ABFH}$. Аналогично, если вы проведёте отрезок AE используете равенство треугольников BCK и ACE, то докажете, что $S_{JCEL}=S_{ACKG}$. Итак , $S_{ABFH}+S_{ACKG} = S_{BJLD}+S_{JCEL}= S_{BCED}$, что и требовалось доказать.

Доказательство Вальдхейма.

Вальдхейм пользуется тем, что площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов, а площадь трапеции равна произведению полусуммы параллельных оснований на высоту. Теперь, чтобы доказать теорему, достаточно только выразить площадь трапеции двумя путями, (Рис. 3). $S = 0{,}5(a + b)^2$. $S = 0{,}5ab + 0{,}5ab + 0{,}5c^2$. Приравнивая правые части, получим: $a^2 + b^2 = c^2$. Теорема доказана.

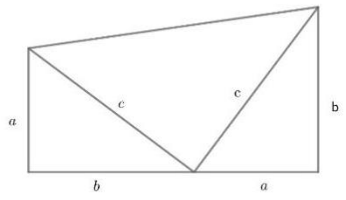


Рис. 3

Доказательство Бхаскари.

Этот индийский математик в пояснении к рисунку написал только одну строчку: "Смотри!". Учёные считают, что он выражал площадь квадрата, построенного на гипотенузе, как сумму площадей треугольников $4ab/2$ и площадь внутреннего квадрата $(a - b)^2$: $c^2 = 4ab/2 + (a - b)^2$; $c^2 = 2ab + a^2 - 2ab + b^2$; $c^2 = a^2 + b^2$. Теорема доказана.

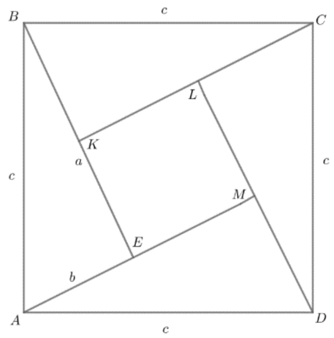


Рис.4

В ходе исследования выяснено, что существует много способов доказательства теоремы Пифагора. Был изучен ряд исторических и математических источников, что теорема Пифагора интересна не только своей историей, но и тем, что она занимает важное место в жизни и науке. Об этом свидетельствуют приведённые в данной работе, а также различные трактовки текста этой теоремы и пути её доказательств. Продуктом исследования являются макеты (Рис. 5-8), созданные в виде интерактивных пособий, где особый интерес представляет из себя последний, потому что был довольно трудоёмким в ходе сборки, а в процессе демонстрации зарекомендовал себя, как самый зрелищный.

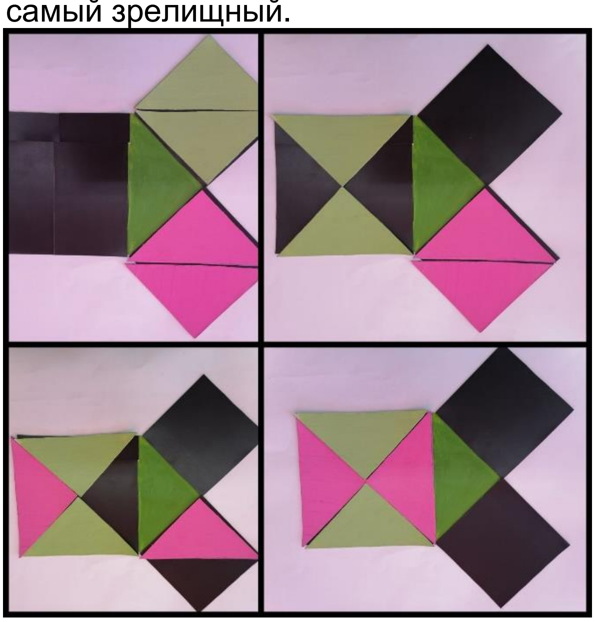


Рис.5 – Создание макета №1

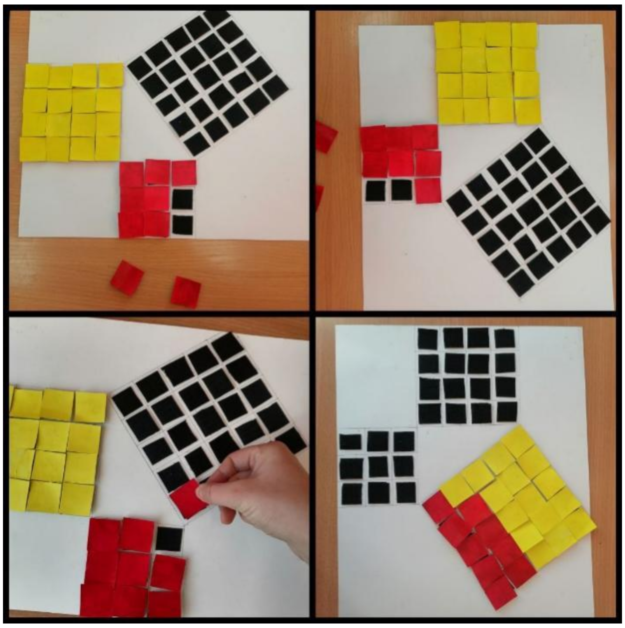


Рис.6 - Создание макета №2

Рис. 7 - Создание макета №3

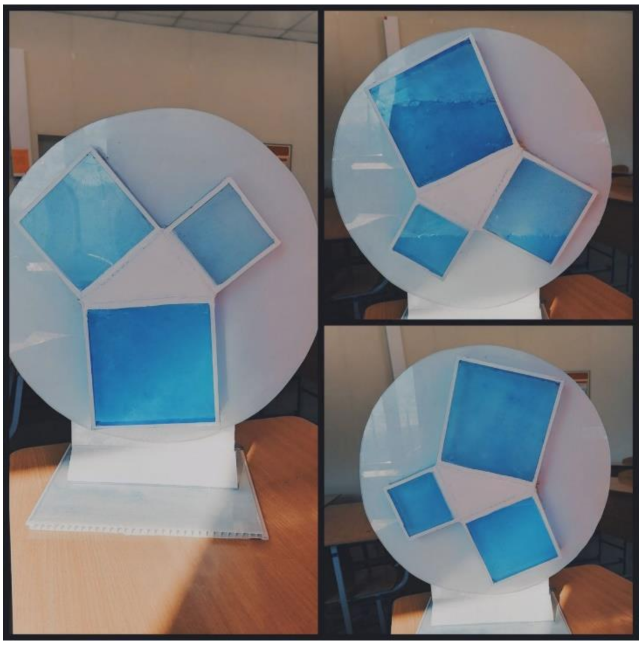


Рис. 8 - Создание макета №3

Все задачи, поставленные в начале работы над проектом были решены. Проект содержит подборку доказательств теоремы Пифагора несколькими способами. Были разработаны материалы (наглядные пособия в форме макетов) для понимания сути теоремы.

В результате проведенного анкетирования было выяснено, что продукт проекта способен донести суть теоремы для большей части учащихся 8 класса и повысить интерес к ней.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Волошинов А.В. Пифагор: союз истины, добра и красоты. — М.: Просвещение, 1993. — 224 с.

2. Гульчевская В.Г. Современные педагогические технологии в профильном и предпрофильном обучении: Учебно-методическое пособие для системы повышения квалификации работников образования. — Ростов н/Д.: ПО ИПК и ПРО, 2005. — 100 с.

3. Пахомова Н.Ю. Метод учебного проекта в образовательном учреждении: Пособие для учителей и студентов педагогических вузов. — М.: АРКТИ, 2005. — 112 с.

4. Литцман В. Теорема Пифагора. — М., 1960. 5. Фридман Е.М. Проекты? Проекты... Проекты! 5-11 классы: учебно-методическое пособие. — Ростов н/Д.: Легион, 2014. — 80 с.

6. Атанасян М.С. Геометрия 7-9 классы. М.: Просвещение, 1991.

КАЛЬКУЛЯТОР КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ НА МНОЖЕСТВЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Борисова Виолетта Михайловна
Муниципальное автономное общеобразовательное учреждение Заозерная средняя общеобразовательная школа с углубленным изучением отдельных предметов №16,
11 класс
г. Томск
Руководитель: Федорова Евгения Юрьевна, учитель математики МАОУ Заозерная СОШ №16 с УИОП

Уравнения в школьном курсе алгебры занимают ведущее место. На их изучение отводится времени больше, чем на любую другую тему.

Действительно, уравнения не только имеют важное теоретическое значение, но и служат чисто практическим целям. Подавляющее число задач о пространственных формах и количественных отношениях реального мира сводится к решению различных видов уравнений. Овладевая способами их решения, мы находим ответы на различные вопросы из науки и техники (транспорт, сельское хозяйство, промышленность, связь и т. д.).

Поэтому в помощь обучающимся старших классов, а также студентам первых курсов СПО и ВУЗов при изучении раздела «Комплексные числа» был разработан калькулятор, позволяющий выполнять проверку решения квадратных уравнений (калькулятор не предоставляет подробного решения уравнений) на множестве комплексных чисел, тем самым симулировать процесс изучения данной темы.

Для реализации проекта была изучена информация о появлении квадратных уравнений [2], алгоритме решений квадратных уравнений на множестве комплексных чисел [4], а также написан программный код для калькулятора на языке программирования С++. На основе полученных знаний был сформулирован порядок действий, который должен выполнить будущий калькулятор. Программа подходит для всех типов квадратных уравнений.

Общий вид квадратных уравнений на множестве комплексных чисел имеет вид $(a_1 + a_2 i)x^2 + (b_1 + b_2 i)x + (c_1 + c_2 i) = 0$. Блок-схема для создаваемого калькулятора представлена на рис. 1, где a_1 , b_1 , c_1 – действительная часть коэффициентов квадратного уравнения, a_2, b_2, c_2 – комплексная часть коэффициентов квадратного уравнения.

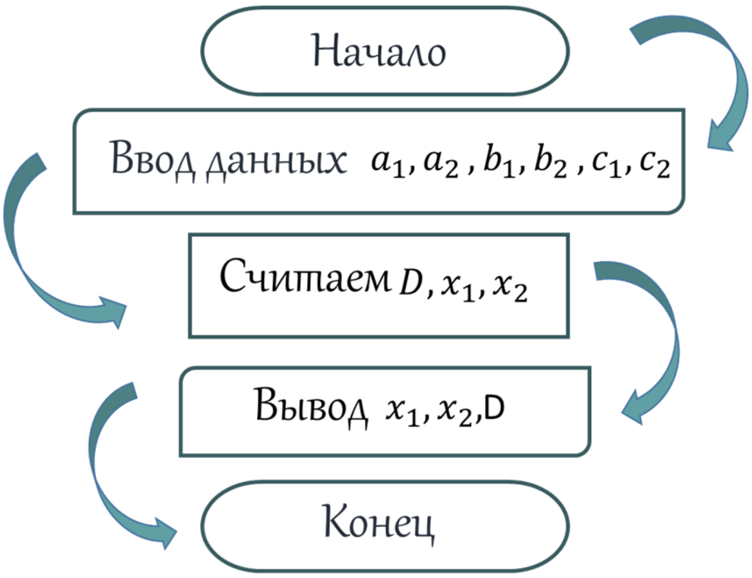


Рис. 1. Блок-схема калькулятора для решения квадратных уравнений

Несмотря на то, что проект находится на этапе разработки, калькулятор уже может решать квадратные уравнения всех типов. Для этого определяются коэффициенты $\mathrm{a}_1, b_1, c_1, \mathrm{a}_2, b_2$, c_2 , которые вводятся в калькулятор при соответствующем запросе программы (рис.2). Больше никаких действий от пользователя не требуется, ответ автоматически выводится в окне программы.

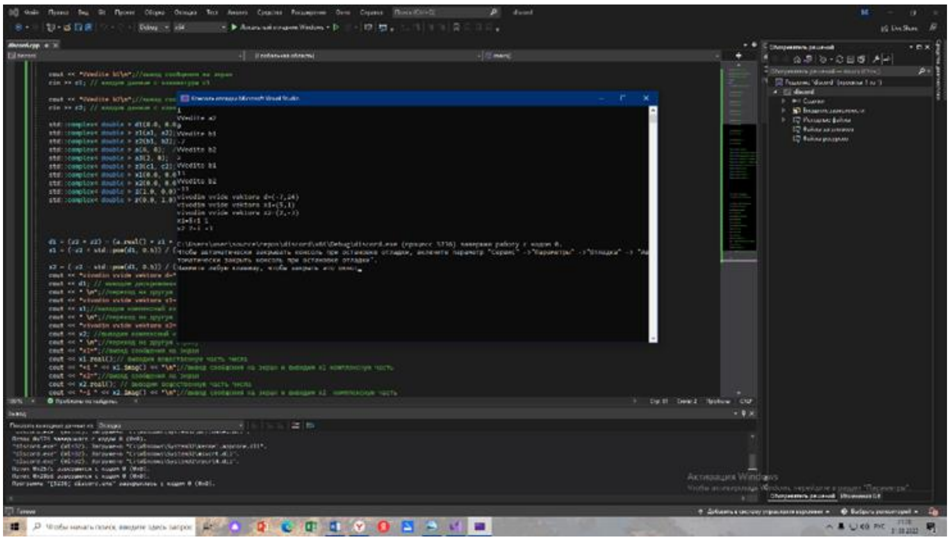


Рис. 2. Ввод коэффициентов уравнения в калькулятор

Следующим этапом работы над проектом будет создание оболочки программы и безвозмездное распространение среди школьников и студентов на всех доступных площадках.

Подводя итоги, можно сделать вывод: квадратные уравнения играют огромную роль в математике. Эти знания могут пригодиться нам на протяжении всей жизни, то они, безусловно, должны заинтересовать увлекающихся математикой школьников.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гусев В. А., Мордкович А. Г. Математика: Справочные материалы: Книга для учащихся. – М.: Просвещение, 1988.
2. Глейзер Г. И. История математики в школе. – М.: просвещение, 1982.
3. Колягин Ю.М., Ткачева М.В., Фёдорова Н.Е., Шабунин М.И. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс : учеб. для общеобразоват. организаций : базовый и углубленный уровни. – М. : Просвещение, 2017.
4. М., Математика (приложение к газете «Первое сентября»), №№ 21/96, 10/97, 24/97, 40/2000.
5. Окунев А. К. Квадратичные функции, уравнения и неравенства. Пособие для учителя. – М.: Просвещение, 1972.
6. Пресман А.А. Решение квадратного уравнения с помощью циркуля и линейки. М., Квант, №4/72. С.34.

ТЕОРЕМА НАПОЛЕОНА И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ В РЕШЕНИИ ЗАДАЧ

Голикова Александра Дмитриевна
Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение «ГимназияNo17»,
11 класс
г. Кемерово
Руководитель: Попова Лариса Георгиевна почетный работник общего образования, учитель математики МБОУ «Гимназии No17»

Построение геометрических фигур, а также изучение их свойств во все времена являлось захватывающим предметом исследования. Мало кто знает, но и всем известный полководец, Наполеон Бонапарт, был не только любителем математики, но и внес свой вклад в ее изучение.

Теорема Наполеона является интереснейшим математическим фактом, который может использоваться не только при решении задач, но и в обыденной жизни. Например, теорема может применяться в декоративно-прикладном искусстве: дизайнерами и ювелирами. С помощью замощения плоскости создаются ювелирные изделия, мозаики, витражи и т.д.

Цель работы состоит в изучении теоремы Наполеона, теоремы Тебо и применение их при решении задач.

Задачи:

1. Изучить теоретический материал по данной теме: теорему Наполеона, ее свойства, теорему Тебо.
2. Рассмотреть применение теорем к решению задач.

Гипотеза: теорема Наполеона – альтернативный метод решения геометрических задач.

Объект исследования: произвольный треугольник, четырехугольник.

Предмет исследования: свойства фигур, образованных с помощью теоремы Наполеона, теоремы Тебо.

Методы исследования:

1. Изучение научной литературы по данной теме.
2. Обобщение изученного материала.

Наполеон Бонапарт – французский государственный деятель, посвятивший свою жизнь не только военному делу, но и изучению точных наук, в частности математики. За заслуги, одной из которых является теорема, названная его именем, он был избран академиком Французской академии наук [1].

Формулировка теоремы звучит следующим образом: если на сторонах произвольного треугольника извне его построены равносторонние треугольники, то их центры являются вершинами равностороннего треугольника (рис. 1). Теорема также

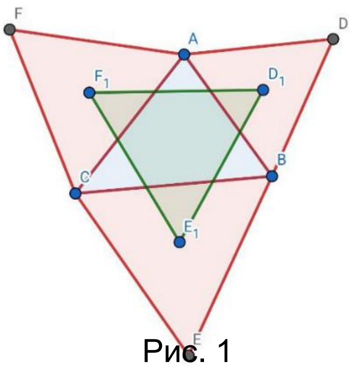


Рис. 1

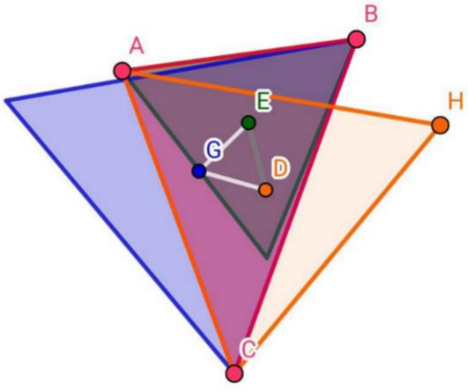


Рис. 2

верна и для треугольников, построенных вовнутрь произвольного треугольника [5, 6] (рис. 2).

Данная теорема имеет несколько способов доказательства, но я хотела бы обратить Ваше внимание на метод поворота:

1. На сторонах произвольного

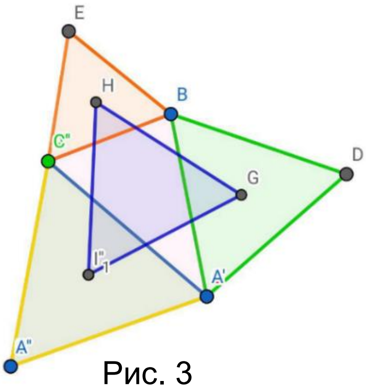


Рис. 3

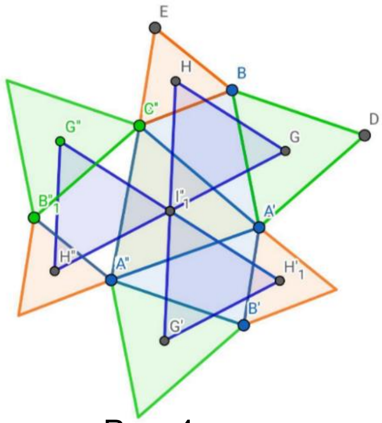


Рис. 4

треугольника построим по равностороннему треугольнику (красный, зеленый и желтый), соединим их центры и получим еще один треугольник (рис. 3).

2. Относительно центра желтого треугольника последовательно повернем все изображение два раза на 120°. Причем желтый треугольник перейдет сам в себя (рис. 4).

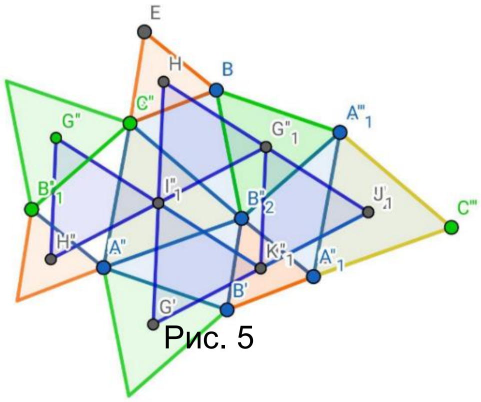


Рис. 5

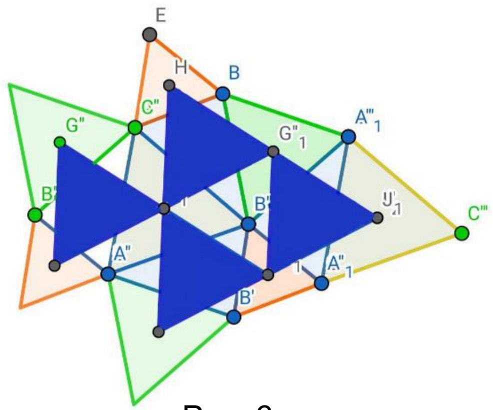


Рис. 6

3. Повернем изначальное изображение еще раз на 120 ° , но теперь относительно красного треугольника (рис. 5).

4. Заметим, что синие треугольники равны, поскольку получены друг из друга поворотом на 120 ° (рис. 6). Также заметим, что розовый треугольник, образованный между синими треугольниками, равен им по трем сторонам (рис. 7).

5. Соединим вершины синих треугольников и получим еще два розовых треугольника. Заметим, что в центре сходится 6 равных углов, а это значит, что градусная мера каждого из них равна 60° (рис. 8).

А поскольку, мы можем сказать, что розовые и синие треугольники равны по трем сторонам, следовательно, все эти треугольники равносторонние. А это значит, что исходный синий треугольник, построенный через середины равносторонних треугольников, также равносторонен.

Что и требовалось доказать.

Для теоремы также справедливы свойства, одно из которых в ходе изучения материалов по теме мне удалось обнаружить и доказать самостоятельно: если исходный треугольник является равнобедренным, то сторона треугольника Наполеона, две точки которой лежат в середине равносторонних треугольников, построенных на равных сторонах исходного треугольника, будет параллельна основанию исходного треугольника.

Доказательство:

1. Построим равнобедренный ΔABC.

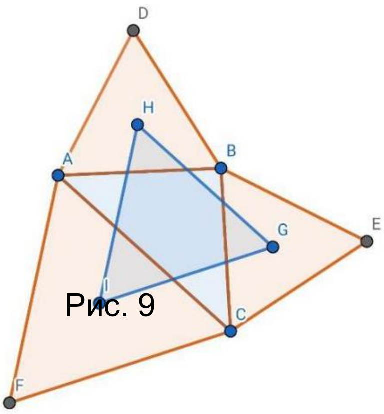


Рис. 9

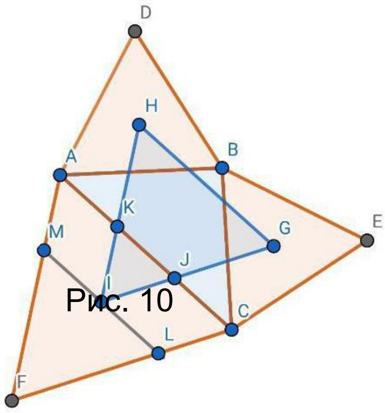


Рис. 10

2. На его сторонах построим равносторонние треугольники и соединим их центры, получим ΔIHG - равносторонний (рис. 9). Через точку I проведем прямую параллельно отрезку AC (рис. 10).

3. Рассмотрим трапецию AMLC, она равнобедренная, поскольку ∠MAC=∠LCA=60^0, значит, ∠AML=∠MLC=120^0. Заметим, что четырехугольники IJCL и IKAM – параллелограммы, откуда следует, что ∠ILC=∠IJC=120^0 и ∠AMI=∠AKI=120^0, а значит ∠IJK=∠IKJ= 60^0 (как смежные углы). Следовательно, Δ IKJ является равносторонним, поскольку и градусная мера ∠KIJ составляет 60^0.

4. Так как ΔIHG также равносторонний, следовательно, ∠IKJ = ∠IHG, а значит AC параллелена HG.

Что и требовалось доказать

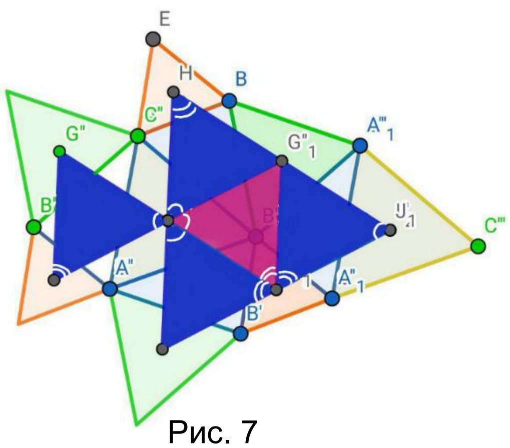


Рис. 7

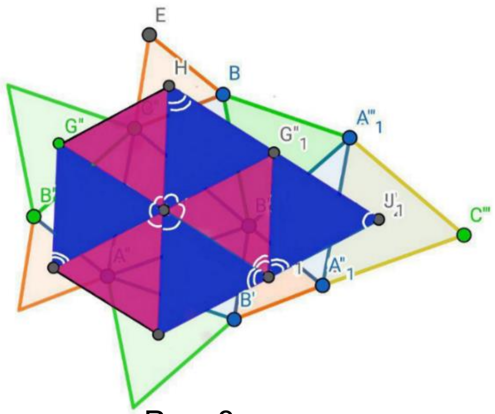


Рис. 8

Далее рассматривается аналог теоремы Наполеона – теорема Тебо, справедливая для параллелограммов. Центры квадратов, построенные на сторонах параллелограмма, лежат в вершинах квадрата [6] (рис. 11).

Существует еще один математический факт, опубликованный фламандским математиком Ван Обелем, из которого теорема Тебо следует естественным образом: если на сторонах произвольного несамопересекающегося четырехугольника построить квадраты внешним образом и соединить центры противоположных, то полученные отрезки будут равны и перпендикулярны (рис. 12)

В заключительной части работы представлено решение задач с использованием теорем и их свойств [2, 3, 4, 7].

Задача (ВСОШ, региональный этап, 2018 г.) [3.С.3] На сторонах AB и AC треугольника ABC нашлись, соответственно, точки D и K, причем DB = BC. Отрезки BK и CD пересекаются в точке P. Докажите, что окружности, описанные около треугольников BDP и CKP, пересекаются в центре окружности, вписанной в ΔABC, если известно, что ∠ACB=60^0.

Доказательство:

1. Выполним указанные в условии задачи построения (рис. 13). Окружности с центрами в точках O и H пересекаются в точке F. Поскольку центр окружности, вписанной в треугольник – это точка пересечения биссектрис углов этого треугольника, значит, необходимо доказать, что в точке F пересекаются биссектрисы ΔABC.

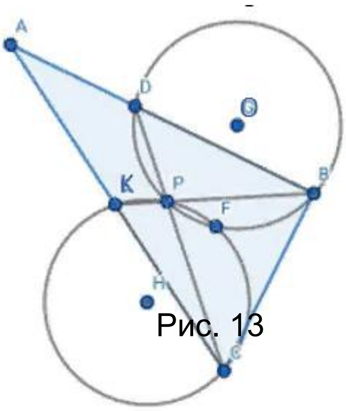


Рис. 13

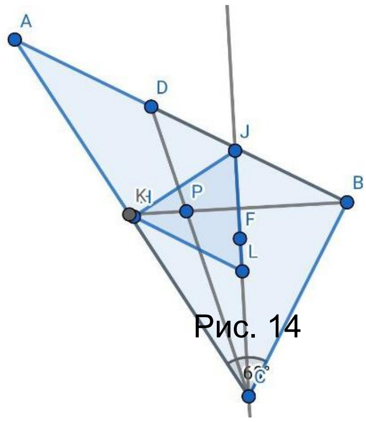


Рис. 14

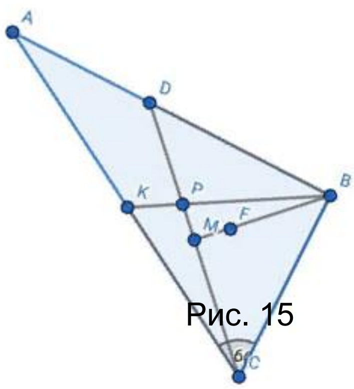


Рис. 15

2. На сторонах ΔABC построим равносторонние треугольники и соединим их центры, получим ΔKLJ. Соединим точки C и J, заметим, что сторона ΔKLJ LJ и точка F лежат на отрезке CJ (рис. 14). Исходя из свойства теоремы Наполеона о том, что если исходный треугольник содержит угол равный 60^0, то треугольник Наполеона лежит на биссектрисе этого угла, можно сделать вывод, что CJ – биссектриса ∠ACB.

3. Рассмотрим ΔDBC (рис. 15). Так как DB=BC (по условию), значит ΔDBC – равнобедренный. Проведем отрезок BM перпендикулярно DC, заметим, что точка F

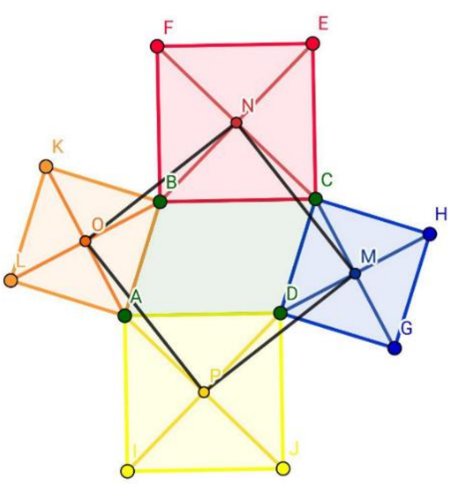


Рис. 11

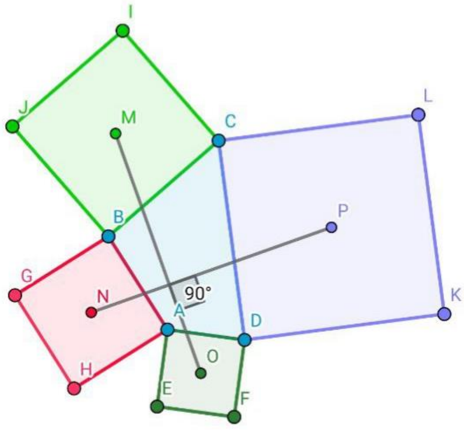


Рис. 12

лежит на этом отрезке. А поскольку ΔDBC – равнобедренный, значит BM является еще и биссектрисой.

Следовательно, точку F пересекает уже как минимум две биссектрисы: BM и CJ. А это значит, что точка F – центр вписанной в ΔABC окружности.

Что и требовалось доказать

Своей работой я хотела показать, что теорема Наполеона является нестандартным и интересным способом решения многих геометрических задач. Геометрия – один из удивительнейших предметов, изучаемых в рамках школьной программы и теорема Наполеона тому подтверждение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Биограф: [сайт]. – Москва, 2017 –. – URL: https://biographe.ru/politiki/napoleon-bonapart/ (дата обращения 16.11.2023). – Текст электронный.
2. Заславский А.А. Геометрические олимпиады им. И.Ф. Шарыгина: монография / А.А. Заславский, В.Ю. Протасов, Д.И. Шарыгин - Москва: МЦНМО, 2007 -152 с.
3. Геометрия на Всероссийской олимпиаде. 11 класс: [сайт]. – Москва, 2014 - . – URL: https://mathus.ru/math/geom11vseros.pdf (дата обращения 10.01.2024). – Текст электронный.
4. Инфоурок: [сайт]. – Смоленск, 2013 - . – URL: https://infourok.ru/podborka-zadach-dlya-matematicheskogo-kruzhka-po-teme-teorema-napoleona-2027734.html (дата обращения 25.12.2023). – Текст электронный.
5. Полянский, А.А. Наполеон и геометрия / А.А. Полянский, Г.А. Фельдман // Квантик. – 2012. - №5. – С. 22-23.
6. Математика для школы: [сайт]. – Москва, 2012 - . – URL: https://maths4school.ru/teorema_napoleona.html (дата обращения 25.12.2023). – Текст электронный.
7. Решу ЕГЭ: [сайт]. – Москва, 2011 -.- URL: https://ege.sdamgia.ru/ (дата обращения 17.01.2024). – Текст элекронный.

МОРСКОЙ БОЙ КАК ИНСТРУМЕНТ В ИЗУЧЕНИИ ТРИГОНОМЕТРИИ

Дурнева Светлана Александровна

Муниципальное автономное общеобразовательное учреждение Заозерная средняя общеобразовательная школа с углубленным изучением отдельных предметов №16

11 класс

г.Томск

Руководитель: Федорова Евгения Юрьевна, учитель математики МАОУ Заозерная СОШ №16 с УИОП

Многие подростки при изучении тригонометрии сталкиваются с проблемой запоминания тригонометрического круга. Чтобы упростить запоминание точек тригонометрического круга была придумана игра, которая поможет ребятам лучше понять тригонометрию. Она базируется на всём известной игре «Морской бой», поскольку эта игра всём хорошо известна, будет не сложно понять принцип игры и на тригонометрической окружности. К тому же, традиционная игра «Морской бой» завязана на попадание в заданные координатные точки, поэтому перенести ее на окружность не составит труда.

Так как мы разрабатываем игру, то форма работы: проектная.

Актуальность состоит в том, что многие подростки, которые сталкиваются с изучением тригонометрии впервые, имеют сложности с запоминанием точек и понятием самого механизма тригонометрической окружности.

Целью проекта является помощь школьникам, изучающим тригонометрию, в запоминании тригонометрическойокружности.

Задачи проекта:

1) Разработка игры;
2) Тестирование нескольких прототипов игры;
3) Выделение наиболее удобного для запоминания и понимания варианта.

Если говорить об аналогах, то их нет.

Чтобы сделать действительно полезный проект, нужно понимать, кто является вашей целевой аудиторией, для моего проекта, ЦА будет такой:

— Основная ЦА: учителя математики, работающие в старших классах, которые ищут новые подходы к запоминанию и усвоению материала по теме «Тригонометрия»;

— Побочная ЦА: ученики старших классов, которые ищут новый «безболезненный» способ понять и подружиться с тригонометрией.

В проекте использовалась тригонометрическая окружность и метод игрового обучения, а также пособия по «Тригонометрии» и правила игры «Морской бой».

Представление плана проектных действий:

— Изучение темы «Тригонометрия»;

— Разработка вариантов игры;

— Тестирование прототипов;

— Выбор наиболее удобного варианта.

Результат проекта: Были разработаны правила похожие на «Морской бой»: в игре используются корабли, которые расставляются на «поле», оппонент в это время расставляет свои корабли. В игре используется 10 кораблей: один четырехпалубный, два трехпалубных, три двухпалубных и четыре однопалубных. Затем игроки по очереди атакуют, называя координаты на поле. Игровое поле представляет собой набор окружностей (рис.1).

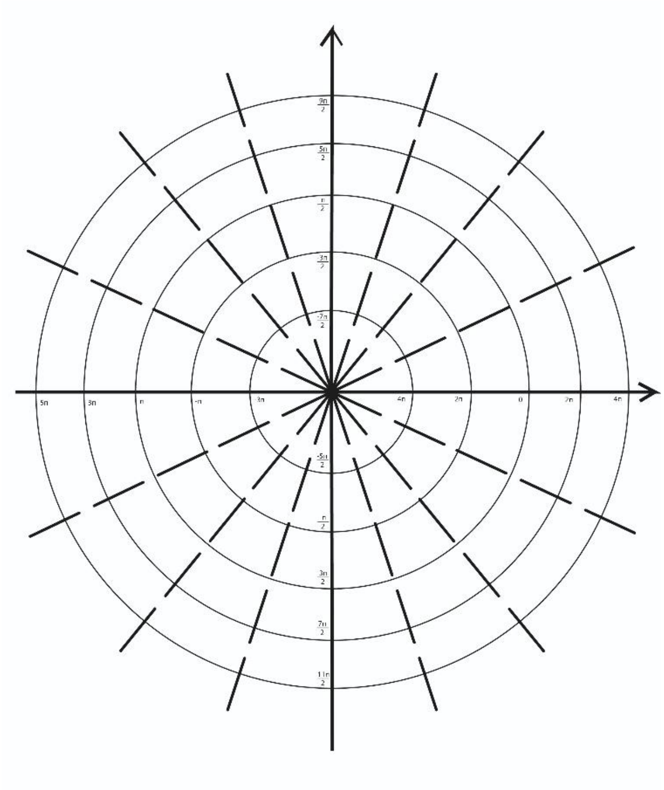


Рис.1 Игровое поле.

Корабли расставляются на пересечении координат тригонометрического круга горизонтально, вертикально, под каким-либо углом или по линии окружности. Как и в традиционной игре игроки отвечают на каждый выстрел словами «промахнулся», «попал» или «потопил». Игра заканчивается, когда один из оппонентов потопит всё корабли противника.

Экономическое обоснование и бюджет проекта: создан без вовлечения средств.

Предложения по внедрению результатов: В дальнейшем планируется написание программного кода для данной игры и ее распространение среди томских школ на безвозмездной основе. Также можно внедрить данную игру в учебный план при изучении старшеклассниками темы «Тригонометрия» и проводить мини турниры в рамках школьного урока.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гельфанд И. М., Львовский С. М., Тоом А. Л. Тригонометрия. М.: МЦНМО, 2002. — 199с.
2. Тригонометрия. Методика изучения и решения задач: учебно-методическое пособие. – Елец: Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина, 2018. – 100с.
3. Ляхов А. Ф., Ляхов Ф. А. Как правильно играть в «Морской бой» / А. Ф. Ляхов, Ф. А. Ляхов // Компьютерные инструменты в образовании. – 2002. – №2.
4. Морской бой (игра), [Электронный ресурс], режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/Морской_бой_(игра)

НЕКОТОРЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ КОНСТРУКЦИИ ЗАДАЧ ПО ПЛАНИМЕТРИИ ЕГЭ

Заварзина Ирина Александровна
ОГБОУ "ТФТЛ"
11 класс
г. Томск
Руководитель Деревцова Елена Викторовна, учитель математики, ОГБОУ "ТФТЛ"

Аннотация: Ученики, которые сдают профильную математику на ЕГЭ, сталкиваются с планиметрическими задачами, но не всегда знают, как их решать. Я составила конструкции – пазлы к задачам, которые помогут решить их.

Ключевые слова: конструкции, геометрия, планиметрия, задачи, ЕГЭ математика

Не секрет, что большую трудность у выпускников на ЕГЭ и ОГЭ вызывают задачи по геометрии. Так, менее 1% учеников на ЕГЭ получают баллы за задачи по планиметрии. Их сложность заключается в том, что невозможно за короткий промежуток времени структурировать имеющиеся знания в контексте конкретной задачи и выбрать правильный путь решения. Я решила поподробнее узнать о методах решениях планиметрических задач, чтобы научиться решать более сложные задачи на эту тему и поближе познакомить своих одноклассников с ними.

Объект моего исследования: планиметрические задачи профильной математики ЕГЭ второй части;

Предмет моего исследования: геометрические конструкции задач по планиметрии ЕГЭ.

Цель – создание сборника «Некоторые геометрические конструкции задач по планиметрии ЕГЭ».

Задачи:

1. Изучить вопросы:

- из чего состоит 17 задание профильной математики ЕГЭ;
- какие существуют способы решения задач по планиметрии;

2. Изучить виды задач ЕГЭ.
3. Структурировать задачи по планиметрии по видам и способам решения.
4. Выделить основные конструкции задач и разработать этапы решения к ним.
5. Оформить полученный материал в собственный сборник «Некоторые геометрические конструкции задач по планиметрии ЕГЭ».
6. Ознакомить одноклассников со сборником.

Для того чтобы больше узнать о планиметрических задачах и способах их решения, с помощью различных источников литературы я изучила ряд вопросов:

- Из чего состоит 17 задание профильной математики ЕГЭ? [2]
- Общие методы решения геометрических задач [1]

Изучив теоретическую часть, я составила геометрические конструкции задач по планиметрии ЕГЭ. После чего оформила собственный сборник «Некоторые геометрические конструкции задач по планиметрии ЕГЭ».

Каждая конструкция показана в виде рисунка, очертания которого выделены контрастно. Для каждой конструкции выделен способ действия для дальнейшего применения, с опорой на теоретический материал (теоремы, свойства, определения) с доказательством. Мною выбраны и представлены задачи ЕГЭ прошлых лет, на применение конструкций.

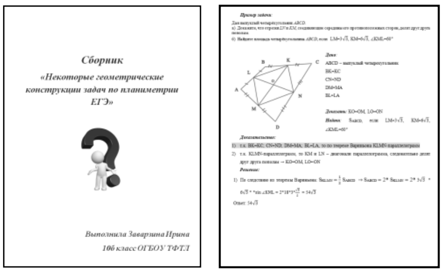


Рис. 1. Собственный сборник

Работая над данной темой, я:

1. Познакомилась с 17 заданием ЕГЭ профильной математики.
2. Изучила способы решения таких задач.
3. Выделила основные конструкции задач и разработала этапы решения к ним.
5. Составила сборник комбинаторных задач.
6. Ознакомила одноклассников с материалом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Портал «Школково» [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://shkolkovo.net/catalog
2. Негосударственное образовательное частное учреждение высшего образования «Московский финансово-промышленный университет „Синергия“» [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://synergy.ru/edu/ege/matematika

ПРИМЕНЕНИЕ ЛЕММЫ БЕРНСАЙДА В РЕШЕНИИ КОМБИНАТОРНЫХ ЗАДАЧ

Копцев Савелий Андреевич
Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение лицей при ТПУ, 10 класс
г. Томск
Руководитель: *Сидоровский Егор Александрович, МАОУ ДО ДТДМ, педагог ДО*

В настоящее время в школьных учебниках для старших классов по математике отражены такие функции и правила комбинаторики как: правило суммы, правило произведения. Примерами изучаемых комбинаторными функциями являются перестановки, сочетания и размещения, а также их вариации, зависящие от свойств элементов множества (допустимы ли повторения элементов или нет). [1,2,4].

В большинстве случаев, школьных знаний хватает для решения комбинаторных задач базового уровня, а также для успешного написания Единого Государственного Экзамена, но для решения более сложных задач необходимы новые способы решения, а также расширение теоретической базы. В качестве примера можно привести олимпиадную задачу «Об ожерельях и браслетах» или задачи «О раскрасках», в которой требуется выяснить, сколькими способами можно составить последовательность из различных элементов, некоторые из которых обладают одинаковыми свойствами.

Важность наличия навыков решения подобных заданий обусловлена тем, что они являются простейшими задачами на теорию групп, определённые элементы которой применяются не только в комбинаторике, но и в разделах физики, химии, информатики и прочих наук.

Для решения данных задач необходимо знать и уметь правильно применять лемму Бернсайда, которая отсутствует в школьной программе. Целью работы является систематизация и обобщение имеющихся знаний, доказательство леммы Бернсайда, нахождение способов решения задачи «Об ожерельях и браслетах» и изложение их понятным ученикам старших классов языком.

Цели и задачи

Цель работы: нахождение способов решения задачи «Об ожерельях и браслетах» и изложение их понятным ученикам старших классов языком.

Задачи: систематизация и обобщение имеющихся знаний, доказательство леммы Бернсайда, нахождение способов решения задачи «Об ожерельях и браслетах» и изложение их понятным ученикам старших классов языком.

Ход работы

На основе литературных источников были обобщены и углублены знания по таким разделам математики, как множества [3,7], функции [5] и группы [6], необходимые для получения и доказательства леммы Бернсайда и вспомогательных лемм.

Для вывода и доказательства леммы Бернсайда сформируем несколько вспомогательных лемм:

Лемма №1:

$$\sum_{y \in G} |X^g| = \sum_{x \in X} |St(x)|$$

Лемма №2:

$$\left|\frac{\mathrm{X}}{G}\right| = \sum_{\mathrm{x}\in\mathrm{X}} \frac{1}{|\mathrm{O(x)}|}$$

Лемма №3:

$$|\{\mathrm{g} \in \mathrm{G}|\mathrm{g(x)} = \mathrm{y}\}| = |\mathrm{St(x)}|$$

Лемма №4:

$$|\mathrm{O(x)}| = \frac{|\mathrm{G}|}{|\mathrm{St(x)}|}$$

Лемма Бернсайда.

$$\left|\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{G}}\right| = \frac{1}{|\mathrm{G}|} \cdot \sum_{\mathrm{g}\in\mathrm{G}} |\mathrm{X}^{\mathrm{g}}|$$

где

$|A|$ – количество элементов во множестве A, называемое мощностью,

$O(x) = \{g(x) \in X | g \in G\} - \text{орбита } x,$

$\frac{X}{G} = \{O(x) | x \in X\} - \text{множество орбит действия группы } G \text{ на } X,$

$St(x) = \{g \in G | g(x) = x\ \} - \text{стабилизатор } x,$

$X^g = \{x \in X | g(x) = x\} - \text{множество неподвижных точек } g.$

Решение задачи

Применим полученные леммы при решении задачи, а также попытаемся сформулировать общий алгоритм для решения задач подобного типа.

Условие:

Пусть имеется n бусинок k типов, причём бусинок первого типа – n_1 штук, бусинок второго типа – n_2 штук,…, бусинок -го типа – n_k штук, $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$. Предполагаем, что у бусин есть лицевая сторона. Все бусины нанизывают на цепочку так, чтобы все бусины смотрели лицевой стороной в одном направлении. После скрепления цепочки получается ожерелье. Причём, место соединения концов цепочки не заметно на самой цепочке.

Сколько различных ожерелий можно составить, соблюдая условия выше?

Решение:

Алгоритм вычисления:

1. Посчитать $\text{НОД}(n_1, n_2, \dots, n_k) = d$.
2. Найти все делители q числа d.
3. Вычислить следующие величины для каждого делителя q:
   a. $P\left(\frac{n_1}{q}, \frac{n_2}{q}, \dots, \frac{n_k}{q}\right) = \frac{\left(\frac{n}{q}\right)!}{\left(\frac{n_1}{q}\right)!\left(\frac{n_2}{q}\right)!\dots\left(\frac{n_k}{q}\right)!}$, где $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$;
   b. $\phi(q)$ – количество меньших, взаимно простых с q чисел (при $q = 1$ считаем, что $\phi(q) = 1$).
   c. $S(q) = \phi(q) \cdot P\left(\frac{n_1}{q}, \frac{n_2}{q}, \dots, \frac{n_k}{q}\right)$.
4. Просуммировать величины $S(q)$ по всем делителям q.

5. Поделить полученную сумму на n.

Итоговое число и будет ответом на задачу.

Заключение

В ходе работы собраны необходимые для доказательства теоремы Бернсайда данные, проведены доказательства сопутствующих лемм, доказана лемма Бернсайда, выработаны методы применения леммы Бернсайда для решения задачи об ожерельях, построен алгоритм вычисления количества ожерелий на понятном для учеников старших классов языке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виленкин И.Я. , Виленкин А.И. , Виленкин П.А. В44 Комбинаторика. - М.: ФИМА, МЦНМО, 2006 .
2. Виленкин Н.Я. Комбинаторика – М., 1969 г., 328 стр. с илл.
3. Зорич В. А. Математический анализ. Часть I. — Изд. 10-е, испр. — М.: МЦНМО, 2019. — xii+564 с. Библ.: 54 назв. Илл.: 65.
4. Алгебра и начала математического. анализа. А45 10 класс : учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил, уровии / [Ю. М. Колягии, М. В. Ткачева, Н. Е. Федорова, М. И. Шабунин]: под ред. А. Б. Жижченко. 4-е изд. -- М. : Просвещение, 2011. – 368 с. : ил. – ISBN 978-5-09-025401-4.
5. Беняш-Кривец В.В. Лекции по алгебре: группы, кольца, поля: учебное пособие для студентов математических специальностей / В.В. Беняш-Кривец, О.В. Мельников. — Минск: БГУ, 2008. — 116 с. ISBN 978-985-518-049-5
6. Гриншпон И.Э., Гриншпон Я.С. Элементарные функции и их графики: учеб. Пособие / И.Э. Гриншпон, Я.С. Гриншпон. – Томск: Изд-во Томск. гос. ун-та систем упр. и радиоэлектроники, 2017. – 98 с.
7. Киреенко С.Г., Гриншпон И.Э. Элементы теории множеств (учебное пособие). – Томск, 2003. – 42 с.

КАЛЬКУЛЯТОР ВКЛАДОВ. МОДЕЛЬ ВЫГОДНОГО ВКЛАДА

Морозов Роман Денисович, Матиевич Кирилл Витальевич
Муниципальное бюджетное нетиповое общеобразовательное учреждение «Гимназия №70»,
10 класс
г. Новокузнецк
Руководитель: Блинова Анна Викторовна, учитель математики

Банковский вклад или депозит — это сумма денежных средств, которую человек на определённое время отдаёт на хранение в банк, а затем забирает обратно. Пока эти деньги находятся у банка, он может распоряжаться ими в своих целях. За эту возможность использовать вложенные средства банки готовы платить, поэтому по окончании срока действия депозита вкладчик получит свои деньги с процентами.

Вклады различаются по следующим параметрам:

· Срок.
· Процентная ставка.
· Возможность пополнения или снятия
· Капитализация.

Мы решили создать бота в мессенджере «Telegram», который сможет рассчитывать любой из четырёх параметров вклада по заданным остальным и указанной капитализации. В роли параметров были приняты первоначальная сумма вклада, процент по вкладу, длительность вклада, а также предполагаемая сумма денег после окончания вклада.

После того как мы определились с архитектурой кода, возникла необходимость нахождения формул, по которым будут вестись расчёты в нашей программе.
Основной формулой послужила формула нахождения суммы денег после окончания вклада :

$$P = S \times \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$$

После того как мы получили программу, необходимо было проанализировать полученные данные и сравнить результаты, полученные при различных комбинациях исходных параметров вкладов. Хотелось бы отметить, что выбранные параметры не должны быть фантастическими, а должны соответствовать современным показателям, которые предлагают банки.

Мы изучили что такое вклады, узнали, какие существуют виды вкладов и чем они отличаются друг от друга. Так, наиболее важными параметрами вклада являются процентная ставка по вкладу, срок вклада, возможность капитализации. Также, среди параметров вклада значимое место занимают возможность снятия процентов и возможность пополнения вклада. Кроме того, мы выяснили, по какой формуле производится расчет суммы дохода по вкладу.

На основании полученный знаний мы написали программу, которая вычисляет неизвестный параметр вклада при заданный остальных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Глейзер Г. И. История математики в школе. - Москва: Просвещение, 1983. - 350 с.
2. Энциклопедический словарь юного математика. - Москва: Педагогика, 1989. - 352 с.

3. Математические функции в жизни [Электронный ресурс]. - Режим доступа: https://infourok.ru/matematicheskie-funkcii-v-zhizni-1534920.html
4. Как копить, финграмотность. Виды банковских вкладов. - Райффайзен Банк. [Электронный ресурс]. https://www.raiffeisen.ru/wiki/vidy-bankovskih-vkladov/

ПОРЯДОК ИЗ ХАОСА

Молодых Ангелина Александровна
Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение «Средняя Общеобразовательная Школа №8 г. Горно- Алтайска им. А.Н. Ленкина», 9 класс
г. Горно- Алтайск
Руководитель: Ширяева Людмила Александровна, учитель математики

Тема является актуальной, поскольку помогает понять и объяснить феномены, которые кажутся случайными или хаотичными, но на самом деле имеют определенные законы и порядок.

Такое исследование может помочь ученикам 9 класса лучше понять и применять теорию вероятности, теорию игр и теорию хаоса в решении задач и анализе сложных систем, что может быть полезным при подготовке к ОГЭ и в дальнейшем образовании.

При изучении материала по теме исследования был выдвинут вопрос: взаимосвязаны ли теории хаоса и вероятности?

На основе вопроса нами выдвинута гипотеза о взаимосвязи теорий.

Целью исследования является изучение теории вероятности и определение взаимосвязи с теорией хаоса, а также определение ее практической полезности для ученика 9 класса и при сдаче ОГЭ.

В рамках работы могут быть поставлены следующие задачи:

1. Изучение основных понятий и принципов теорий вероятности и хаоса.
2. Анализ примеров и задач, связанных с вероятностными событиями. Оценка практической полезности и применимости изученных концепций и методов для ученика 9 класса и при сдаче ОГЭ.
3. Проведение эксперимента, связанного с теорией хаоса.

В данной исследовательской работе мы применяли следующие методы: анализ, сравнительный анализ, анализ литературы, экспериментальный метод и многие другие.

Теоретическо-методологическую основу нашего исследования составили работы следующих авторов: Б. Мандельброт, В. Серпинский, Г. Секей, Е.А. Раенко и т.д.

Этапы исследования:

1. Изучить литературу по теме исследования и разобрать основные определения и формулы.
2. Решить задачи по теории вероятности варьируя их по уровню сложности.
3. Провести эксперимент по построению треугольника Серпинского.

Прежде всего, мы рассмотрели базовые определения и формулы теории вероятности, но также нами были затронуты и формулы выше изучаемых в 9 классе, и парадоксы теории вероятности.

Парадоксы в математике - ситуация, когда в рамках той или иной математической теории доказываются два взаимно исключающих друг друга утверждения, причем каждое из этих утверждений выведено законными с точки зрения данной теории методами. Парадоксы в математике, как правило, свидетельствует о глубоких недостатках математической теории. И неудивительно, что обнаружение парадоксов часто ведет к попыткам существенной перестройки всей теории. Наибольшую известность получили парадоксы «наивной» теории множеств и классической математической теории вероятностей. В обеих теориях обнаружение парадоксов стимулировало дальнейшие исследования и привело к появлению соответствующих аксиоматических теорий. Аксиоматизация теорий направлена на то, чтобы образование такого рода понятий перестало быть допустимым [3]. Рассмотрим несколько из них:

1. Парадокс дней рождений: Представьте себе группу из 23 человек. Вероятность того, что двое из них имеют одинаковые дни рождения, кажется очень малой. Однако, если посчитать вероятность, наоборот, - то есть вероятность того, что ни одной пары с одинаковыми днями рождения нет, оказывается, что она невероятно низкая. Этот парадокс объясняется тем, что с увеличением числа людей в группе вероятность совпадения дней рождений растет [5].

2. Парадокс Монти Холла: Этот парадокс известен из телевизионной игры и вызывает споры у многих людей. Представьте, что у вас есть возможность выбрать одну из трех дверей, за одной из которых находится приз, а за двумя другими - ничего. После вашего выбора ведущий, зная, что находится за каждой дверью, открывает одну из оставшихся дверей, за которой нет приза. Затем он предлагает вам изменить свой выбор. Парадокс состоит в том, что вероятность выигрыша увеличивается, если вы измените свой выбор несмотря на то, что на первом этапе у вас был выбор из трех дверей с вероятностью 1/3.

3. Парадокс Штейна: Данный парадокс связан с тем, что вероятность одного события может зависеть от другого события, с которым оно не связано напрямую. Рассмотрим три корзины с шариками– в первой только красные, во второй только зеленые, а в третьей и красные, и зеленые. Мы выбираем одну корзину наугад, а затем из нее наугад выбираем шарик. Вероятность того, что выбранный шарик будет красным, ни в чем не отличается от вероятности выбрать красный шарик из первой корзины. Однако, если мы сначала выбираем корзину с зеленым шариком, а затем выбираем из нее шарик, то вероятность того, что он будет красным, будет выше, чем если мы выбираем корзину наугад.

4. Парадокс спящей красавицы — парадокс теории вероятностей. Парадокс представляет собой вероятностную задачу, которая имеет несколько различных, по-своему правильных ответов, и демонстрирует, как можно манипулировать статистикой. Автором парадокса считается Адам Элга. Испытуемой делается укол снотворного. Бросается симметричная монета. В случае выпадения орла: её будят, и эксперимент на этом заканчивается. В случае выпадения решки: её будят, делают второй укол и будят на следующий день, не бросая монеты. Вся эта процедура Красавице известна, однако у неё нет информации, в какой день её разбудили [2].

Эти парадоксы являются хорошим примером того, как наше интуитивное представление о вероятности может быть ошибочным.

В ходе работы мы рассмотрели несколько типичных примеров задач разных уровней сложности.

Задача 1. Сколько различных семибуквенных «слов» можно составить, используя только две буквы «А», «Б» и «В»?

Решение:

Мощность алфавита- 3 буквы. Длина слова- 7 букв.

3^7= 2187 слов.

Ответ: 2187 слов.

Задача 2. Сколько хорд можно получить, попарно соединяя 18 точек, лежащих на одной окружности?

Решение:

Для решения этой задачи применяется формула перестановок без повторения. Эта формула выглядит следующим образом:

$$\mathrm{P}_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

где n — это количество элементов в множестве 18 по условию, а k — количество элементов в комбинации 2 точки на окружности.

Сочетание без повторений

$$C_{18}^{2} = \frac{18!}{2!\,(18-2)!} = \frac{18!}{2!\,16!} = 153$$

Задача 3. В коробке находятся фишки четырех разных цветов. Игрок должен сделать набор из 7 фишек. Сколькими способами он может это сделать?

Решение;

Формула сочетания с повторениями.

$$\overline{\mathrm{C}}_n^k = \mathrm{C}_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k! * (n-1)!}$$

K=7, n=4

4 цвета. Нужно 7 фишек

Формула сочетания с повторениями

$$\overline{C}_4^{7} = C_{7+4-1}^{7} = C_{10} = \frac{10!}{7!\cdot(10-7)!} = \frac{10!}{7!\,3!} = 120$$

Ответ: 120 вариантов

Теория хаоса является одной из важных областей науки, изучающей нелинейные динамические системы. Ее особенностью является чувствительность этих систем к начальным условиям.

Одним из самых известных элементов теории хаоса является «Эффект бабочки». Этот эффект часто описывают так: бабочка, хлопающая крыльями в Австралии, может вызвать ураган в Китае.

Все началось с дотошности. В 1961 году американский метеоролог и математик Эдвард Лоренц сидел перед архаичным компьютером и пытался составить прогноз погоды. Один из параметров имел значение 0,506, но Лоренц решил ввести более точное число – 0,506127. В результате получился совершенно другой погодный сценарий [4].

Бабочка появилась чуть позже. Лоренцу надо было делать доклад на заседании Американской ассоциации содействия развитию науки, и он решил не грузить публику конструкциями типа «инвариантное множество в трехмерном фазовом пространстве гладкого потока со сложной топологической структурой», а использовать что-то более романтическое. Кто-то из коллег посоветовал ему воспользоваться образом бабочки.

Очевидно, это хрупкое насекомое проникло в научный дискурс из рассказа Рэя Брэдбери «И грянул гром». Там герой попадает в эпоху динозавров и случайно наступает ногой на бабочку. Вернувшись в настоящее, он обнаруживает, что в политике США произошли радикальные перемены [4].

Помимо «Взмаха крыла бабочки», теория хаоса также находит применение в области криптографии, где она используется для разработки алгоритмов шифрования и защиты информации.

Мы провели Эксперимент «Построение треугольника Серпинского»

На наш взгляд фракталы очень интересный объект для изучения, которые непосредственно связаны с теорией хаоса. Однако, не смотря на всю привлекательность и распространение фрактальной геометрии в кругах математиков, она остается все еще мало затронута в школе.

Чтобы решить данную проблему мы ставим целью данного эксперимента рассмотреть треугольник Серпинского в силу базовых школьных знаний, тем самым показав, что фракталы могут быть применимы и в школе.

Это фрактал, который был описан в 1915 году польским математиком Вацлавом Серпинским. В честь кого и получил свое название.

Фрактал – это множество, обладающее свойством самоподобия. Иначе можно сказать, что это объект в точности или приближенно совпадающий с самим собой. Целое имеет ту же форму что и одна или более частей. Самыми простыми примера являются такие объекты и явления как облака, деревья, береговая линия, кораллы и тд [1].

Ход работы:

1. На плоскости зафиксируем три точки A, B, C, получив треугольник. Каждой точке присваиваем значения: А-1 и 2, В-3 и 4, С-5 и 6. Данные значения взяты с точек на гранях игрального кубика.

2. Отмечают любую начальную точку, в любом месте плоскости, не выходя за пределы нашего треугольника.

3. Бросаем кубик и смотрим на число, которое выпало. Если это 1 или 2, то приближаемся на половину к вершине А, если 3 или 4, то к вершине В и если 5 или 6, то к вершине С.

4. Далее повторно бросаем кубик и по тому же правилу, но уже от последней поставленной точки.

5. Повторяем эти действия пока не появятся четкие очертания треугольника Серпинского.

Таким образом с помощью случайных результатов у нас получился треугольник Серпинского (См. Рисунок 1).

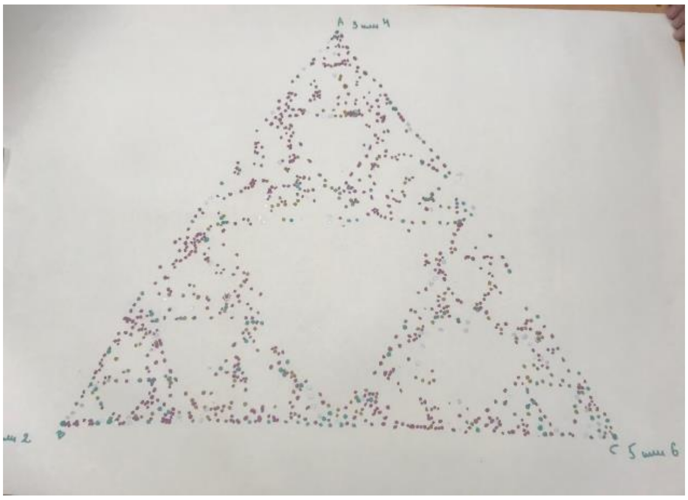


Рисунок 1– Треугольник Серпинского

Вывод по эксперименту: нам удалось построить треугольник Серпинского, с помощью бросания игрального кубика и доказать, что из хаотичных бросков игрального кубика возникают упорядоченные значения.

В данной научной работе мы рассмотрели взаимосвязь между теорией вероятности и хаоса. Оказывается, что эти три области имеют глубокие связи и взаимодействия, которые можно применить в различных практических ситуациях.

Во-первых, теория вероятности играет важную роль в понимании и анализе стохастических процессов, которые обычно возникают при моделировании систем с неопределенностью. В играх, особенно в настольных играх или экономических ситуациях, вероятностные модели позволяют оценивать вероятности различных исходов и принимать рациональные решения на основе этой информации.

Во-вторых, хаос имеет существенное влияние на прогнозирование и предсказание поведения динамических систем. В хаотических системах даже малейшие изменения в начальных условиях могут привести к существенно различным результатам на длинных временных интервалах. Это принципиально важно в играх, так как небольшие изменения стратегии или хода могут привести к кардинально разным конечным результатам.

Нами был проведен эксперимент по построению треугольника Серпинского. Этот треугольник является примером фрактала – самоподобной геометрической структуры. Построение треугольника Серпинского позволяет наглядно продемонстрировать принципы самоподобия, которые широко используются в области вероятности и статистики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. – М.: ИКИ, 2002. –656 с.
2. Парадокс спящей красавицы [Электронный ресурс]. - URL : https://festivalnauki.ru/media/articles/interesno-o-nauke/paradoks-spyashchey-krasavitsy/?sphrase_id=18797 (дата обращения: 11.02.2024 г.).
3. ПАРАДОКСЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ // cyberleninka URL: https://cyberleninka.ru/article/n/paradoksy-teorii-veroyatnostey (дата обращения: 02.02.2024).
4. Роль игр в изучении теории вероятностей // cyberleninka URL: https://cyberleninka.ru/article/n/rol-igr-v-izuchenii-teorii-veroyatnostey (дата обращения: 09.11.2023).
5. ПАРАДОКС ДНЕЙ РОЖДЕНИЯ В КРИПТОГРАФИИ // cyberleninka URL: https://cyberleninka.ru/article/n/paradoks-dney-rozhdeniya-v-kriptografii (дата обращения: 12.02.2024).

ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ НА ПРИМЕРЕ РЕШЕНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Носарев Михаил Алексеевич
Частное общеобразовательное учреждение “Лицей ТГУ”,
10 класс
г. Томск
Руководитель: Тутынин Антон Валерьевич, преподаватель математики

Введение

В настоящее время ученики старших классов испытывают проблемы при выполнении заданий, требующих множественные логические рассуждения. Процесс построения простейших математических моделей на примере заданий, связанных с движением тел, смешивании растворов, определение изменения суммы денег на вкладе или кредите, позволяет справиться с этими сложностями. Также математические модели - мощный и необходимый инструмент решения задач, так как не всегда можно провести эксперимент, а цена ошибок в эксперименте очень высока [1].

Логические рассуждения и понимание самого процесса являются ключевыми элементами в построении математических моделей. Рассуждения позволяют нам формулировать предположения, выдвигать гипотезы и выводить новую информацию на основе уже имеющихся данных.

Использование навыков построения математических моделей может быть очень полезным при решении задач с экономическим содержанием в ЕГЭ. Задание имеет практико-ориентированный характер и позволяет участнику экзамена продемонстрировать умения анализировать условие задачи, составлять математическую модель и находить обоснованный ответ, используя изученные математические методы. Средний процент решаемости таких задач – 8,4%. Основной причиной, по которой участник экзамена не приступает к решению задачи или неверно составляет математическую модель, является как раз попытка безуспешно применять буквально алгоритм решения задания прошлого года [2].

Объект исследования – математические модели.

Предмет исследования – математическое моделирование на примере задач с экономическим содержанием.

Задачи:

1.1 Выявить причины сложностей выстраивания логических рассуждений в современном мире;

1.2 Изучить понятие математическая модель и выделить её виды;

1.3 Рассмотреть типы кредитов (аннуитетный и дифференцированный);

2.1 Создать методическое пособие со способами решения задач экономических задач;

2.2 Провести апробацию методички.

Методы и методики работы:

Теоретические: анализ проблемы, изучение новой информации.

Эмпирические: создание методического пособия, анкетирование.

Теоретическая часть

Кредит — это финансовые обязательства двух сторон, одна из которых предоставляет наличные или другие ресурсы, а вторая обещает вернуть их согласно принципам срочности, платности и возвратности.

На практике выделяют две схемы в зависимости от платежа – аннуитетный и дифференцированный.

Аннуитетный платеж – это такая система выплат, при которой кредит выплачивается раз в год равными платежами. При этом каждый год до внесения платежа банк начисляет на оставшуюся часть долга некоторый процент, то есть оставшаяся сумма долга увеличивается на это количество процентов.

Приступим к построению математической модели. В каждой математической модели существуют входные данные – переменные, обозначим их:

S – сумма кредита (первоначальный долг);

r – процент по кредиту (в %);

$k = 1 + \frac{r}{100}$ – повышающий коэффициент (данное число показывает, во сколько раз увеличивается наша сумма, которую должны банку);

x – ежегодная (ежемесячная) выплата.

Далее построим модель, в которой показано, как именно будет уменьшаться сумма долга.

Таблица 1 – Математическая модель для аннуитетного платежа

Год	Сумма долга
1	$Sk^2 - x$
2	$Sk^2 - xk$
3	$Sk^3 - xk^2 - x$
…	…
m	$Sk^m - xk^{m-1} - \cdots - xk - x = 0$

Выражение в последней строчке приравняли к нулю, так как предполагаем, что в m -ый год кредит бует полностью выплачен. Далее преобразуем полученное выражение:

$$Sk^m - xk^{m-1} - \cdots - xk - x = 0$$
$$Sk^m = xk^{m-1} + \cdots + xk + x$$
$$Sk^m = x(k^{m-1} + k^{m-2} + \cdots + k + 1)$$

Последняя скобка представляет собой геометрическую прогрессию, поэтому определим её сумму:

$$k^{m-1} + k^{m-2} + \cdots + k + 1 = \frac{k^m - 1}{k - 1}$$

В результате у нас получится следующее выражение, которое можно использоваться для решения подобных задач:

$$Sk^m = x\frac{k^m - 1}{k - 1}$$

Дифференцированный платеж – это такая система выплат, при которой сама сумма долга уменьшается равномерно, то есть на одну и ту же величину каждый год (месяц). При этом платежи каждый год (месяц) разные вследствие того, что выплачивается определенная часть кредита и проценты, начисленные на остаток долга. Также сумма выплаты будет уменьшаться за счёт того, что процент будет начисляться на меньшую сумму долга.

Приступим к построению математической модели. Обозначим входные данные:

S – сумма кредита (первоначальный долг);

r – процент по кредиту (в %);

$k = 1 + \frac{r}{100}$ – повышающий коэффициент;

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m$ – ежегодные выплаты.

Таблица 2 - Математическая модель для дифференцированного платежа

Год (m)	Сумма до начисления процентов (S до k)	Сумма после начисления процентов (S после %)	Сумма после выплаты (S после xm)	Выплаты (xm)
1	S	Sk	$\frac{m-1}{m}S$	$Sk-\frac{m-1}{m}S$
2	$\frac{m-1}{m}S$	$\frac{m-1}{m}Sk$	$\frac{m-2}{m}S$	$\frac{m-1}{m}Sk-\frac{m-2}{m}S$
3	$\frac{m-2}{m}S$	$\frac{m-2}{m}Sk$	$\frac{m-3}{m}S$	$\frac{m-2}{m}Sk-\frac{m-3}{m}S$
…	…	…	…	…
m	$\frac{1}{m}S$	$\frac{1}{m}Sk$	0	$\frac{1}{m}Sk$

Определим общую сумму выплат:

$$x_1+x_2+x_3+\dots+x_m=Sk-\frac{m-1}{m}S+\frac{m-1}{m}Sk-\frac{m-2}{m}S+$$
$$+\frac{m-2}{m}Sk-\frac{m-3}{m}S+\dots+\frac{1}{m}Sk$$

В данном выражении можно заметить, что 2-й и 3-й, 4-й и 5-й, … член отличаются только наличием k. Преобразуем выражение:

$$x_1+x_2+x_3+\dots+x_m=Sk+S\frac{m-1}{m}(k-1)+S\frac{m-2}{m}(k-1)+S\frac{1}{m}(k-1)$$

Также, заметим, что все элементы кроме первого имеют общий множитель $S(k-1)$, поэтому вынесем его. В результате получим:

$$x_1+x_2+x_3+\dots+x_m=Sk+S(k-1)\left(\frac{m-1}{m}+\frac{m-2}{m}+\dots+\frac{1}{m}\right)$$

Можно заметить арифметическую прогрессию, которую образуют дроби. Преобразуем выражение по формуле суммы арифметической прогрессии:

$$x_1+x_2+x_3+\dots+x_m=Sk+S(k-1)\frac{\left(\frac{m-1+1}{m}\right)(m-1)}{2}$$

Итоговой формулой, позволяющей определить общую сумму выплат, является следующее выражение:

$$x_1+x_2+x_3+\dots+x_m=Sk+S(k-1)\frac{m-1}{2}$$

Практическая часть

В качестве практической части исследования было составлено методическое пособие, которое содержит разборы основных типов задач. Также школьникам предложено самостоятельно отработать полученные знания на подобных заданиях.

Методическое пособие включает в себя следующие разделы:

1. Базовые задания на проценты
2. Кредиты. Аннуитетный тип
3. Кредиты. Дифференцированный тип
4. Кредиты. Задачи смешанного типа

Методическое пособие содержит описание типов кредитов и способов построения моделей, сопровождающееся таблицами и графическим материалом. На рисунке 1 (а, б) показаны оглавление и пример описания решения экономической задачи, представленной в методическом пособии.

Так же данное методическое пособие было апробировано на уроках математики для профильных 11 классов. В начале и конце урока было проведено анкетирование, которое показало, что качество понимания задач, подобного рода, выросло. Обучающие стали грамотно и верно с точки зрения математики выполнять построение модели. Возникают сложности при решении составленного уравнения за счёт громоздких вычислений и сложностей в преобразовании выражения.

Оглавление

Задание №1

Бизнесмен Олег Т. в январе 2024 года взял кредит в банке под 20% годовых, причем выплачивать кредит он должен равными суммами в течение трех лет. Сколько рублей в итоге выплатил Олег банку, если известно, что его переплата по кредиту составила 675 500 рублей?

Решение:

Пусть S рублей – сумма кредита, x рублей – ежегодный платеж, k – повышающий коэффициент $\left(k = 1 + \frac{r}{100} = 1 + \frac{20}{100} = 1{,}2\right)$.

Составим математическую модель:

Год	S до начисления %	S после начисления % и платежа
1	S	$Sk - x$
2	$Sk - x$	$(Sk - x)k - x = Sk^2 - xk - x$
3	$Sk^2 - xk - x$	$(Sk^2 - xk - x)k - x =$ $= Sk^3 - xk^2 - xk - x$

После 3-го года долга по кредиту не осталось, поэтому:

$$Sk^3 - xk^2 - xk - x = 0$$
$$Sk^3 - x(k^2 + k + 1) = 0$$

Всего за три года Олег выплатил банку $3x$ рублей, а его переплата составила $3x - S = 675500$ рублей. Отсюда $S = 3x - 675500$.

$$(3\mathrm{x} - 675500)k^3 - x(k^2 + k + 1) = 0$$
$$x\left(3k^3 - (k^2 + k + 1)\right) = 675500k^3$$
$$x = \frac{675500k^3}{3k^3 - k^2 - k - 1}$$

Подставим численные значения:

$$x = \frac{1{,}2^3 \cdot 675500}{3 \cdot 1{,}2^3 - 1{,}2^2 - 1{,}2 - 1} = 756000 \text{ руб.}$$

Рисунок 1 – а) Оглавление; б) Пример оформления задания

Выводы

В ходе выполнения исследовательской работы было составлено методическое пособие, позволяющее обучающимся 11 классов изучить материал по теме: “Задачи экономического содержания”. Оно будет полезно при использовании преподавателями на уроках, чтобы обучающиеся качественней освоили материал. Это доказывает апробация методического пособия на обучающихся 11 классов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гатауллина Е. В., Беляева М. Б. КЛАССИФИКАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ // Научный журнал. 2022. №3 (65).
2. Ященко И.В., Высоцкий И.Р., Семенов А.В., Трепалин А.С., Черняева М.А. Методические материалы для председателей и членов предметных комиссий субъектов Российской Федерации по проверке выполнения заданий с развёрнутым ответом экзаменационных работ ЕГЭ 2024 года / Ященко И.В., Высоцкий И.Р., Семенов А.В., Трепалин А.С., Черняева М.А. // Математика. – 2024.
3. Козулина Н. С., Карачев А. Ю., Ахмедзянова Е. В. Фаббинг - неблагоприятный фактор в формировании компетенций у студентов вузов // Russian Journal of Education and Psychology. 2016. №10 (66).

ДОСКА ГАЛЬТОНА

Осипов Дмитрий Иванович
Муниципальное общеобразовательное учреждение «Лицей №1»,
9 класс
г. Ачинск
Руководитель: Нерода Ирина Павловна, учитель физики МОУ Лицей№1 г. Ачинска

Второй год подряд в российских школах введен предмет «Вероятность и статистика». Данный предмет необходим для сдачи ОГЭ по математике. И, также, учащиеся при подготовке к профильной сдаче ЕГЭ по математике должны изучать основы данной теории более основательно из-за задач на теорию вероятностей (одна из которых усложнённая) [1]. Доска Гальтона является одним из классических демонстрационных устройств в области вероятности и статистики, и в современном мире остается актуальной, так как служит для обучения, исследований и понимания случайных процессов.

В источнике [2] говорится о том, что решение внедрить в школу элементы теории вероятностей и математической статистики появилась в связи с тем, что участвующие в международных исследованиях российские школьники не справлялись с заданиями на применение умений, связанных с неопределённостью и статистическими данными. Проблема в том, что учащиеся не могут применять свои знания для жизненных нужд. Доска Гальтона - это устройство, которое используется для моделирования случайных процессов и демонстрации статистических явлений. Этот процесс моделирует случайные события и позволяет исследовать различные статистические закономерности не только в математике, но и в биологии, и в физике и других науках. Поэтому мы решили изучить принцип работы доски Гальтона и посмотреть, как это можно использовать на уроках в школе.

Изучая литературу [3] выяснили, что доска Гальтона была разработана французским ученым Фрэнсисом Гальтоном в конце XIX века и с тех пор стала популярным инструментом в области физики и статистики. Доска Гальтона имеет несколько главных компонентов, включая вертикальную доску с отверстиями, шарики и лотки для сбора шариков (Приложение 1). Физические принципы, лежащие в основе работы доски Гальтона, определяют ее особенности и свойства. Важным физическим принципом, определяющим траекторию движения шарика на доске Гальтона, является закон отражения. Когда шарик сталкивается с преградой, он отскакивает от нее под углом, равным углу падения. Это происходит из-за изменения направления движения шарика и изменения его импульса в результате взаимодействия с преградой [4]. Другим важным физическим принципом, определяющим движение шариков на доске Гальтона, является закон сохранения энергии. Когда шарик сталкивается с пластинкой и отскакивает от нее, его потенциальная энергия превращается в кинетическую энергию, что позволяет шарику продолжить движение вниз. При этом часть энергии теряется из-за трения шарика о пластинки, что приводит к затуханию движения шариков со временем. Другим важным физическим аспектом работы доски Гальтона является вероятностный характер движения шариков. Каждый шарик, попадая на верхнюю преграду, имеет определенные вероятности отклонения влево или вправо. Это связано с некоторыми случайными факторами, такими как неровности поверхностей, неравномерное распределение массы шарика или небольшие воздушные потоки вокруг доски, а также физические свойства материала, из которого изготовлена доска Гальтона. Например, если пластинки сделаны из материала с высоким коэффициентом трения, то шарики будут медленнее двигаться, и их движение будет затухать быстрее. Понимание этих принципов позволяет более глубоко изучать и анализировать работу доски Гальтона, а также применять ее в моделировании различных статистических процессов в различных областях. Доска

Гальтона может быть интересна для наглядных экспериментов на уроках не только математики, но и физики, поэтому исследование в этой области необходимы.

Гипотеза: доску Гальтона можно использовать для демонстрации статистических закономерностей в различных науках.

Цель: сконструировать доску Гальтона и выяснить область ее применения.

Задачи: проанализировать литературу об использовании и свойствах доски Гальтона; сконструировать доску Гальтона и провести опыты; проанализировать результаты и сделать выводы.

Изучив литературу [5-8] проанализировали в каких областях можно использовать доску Гальтона и составили обобщающую таблицу 1.

Таблица 1- Применение доски Гальтона

Область применения	Для чего применяется
Математика	Помогает визуализировать различные аспекты вероятностных явлений: распределение вероятностей, закон больших чисел, биномиальное распределение и другие; принцип равномерного распределения вероятностей и закон Гаусса.
Статистика	Иллюстрирует закон больших чисел и центральную предельную теорему.
Физика	Помогает визуализировать распределение молекул идеального газа по скоростям, демонстрировать опыт Штерна. Демонстрация закона сохранения энергии и законов движения под действием силы тяжести. Можно использовать, как механическую модель и моделировать сопротивление проводника: соударения свободных электронов с атомами кристаллической решётки металла.
Биология	Демонстрация процессов, связанных с вариативностью.
Экономика и финансы	Демонстрация случайных процессов и моделирование вероятностей для того, чтобы понять случайные колебания и риски в финансовых инструментах.

Видим, что вероятностные и статистические закономерности встречаются во многих областях. Поэтому наша работа имеет практическую направленность и сконструированная доска Гальтона, может применяться на различных предметах в школе.

Для начала мы сконструировали доску Гальтона, используя тонкие доски, прозрачную клеенку и пластиковые шарики. Я взял лист фанеры и вырезал их него прямоугольник со сторонами 40х30 см, распилил и выточил длинные бруски, из которых сделал стенки, а так же препятствия для шариков и отсеки для них. После чего вырезал прозрачную клеенку размером 40х30 см, поместив шарики вовнутрь доски, я наклеил клеенку на конструкцию. Я сделал доску Гальтона, пользуясь картинками в Интернете, к сожалению, у меня не получилось с первого раза добиться правильного распределения шариков. Поэтому я убрал самое первое препятствие, а также я заметил, что самый последний ряд стоит слишком близко к отсекам и убрал его (рис.1). После мне удалось добиться правильного распределения шариков.

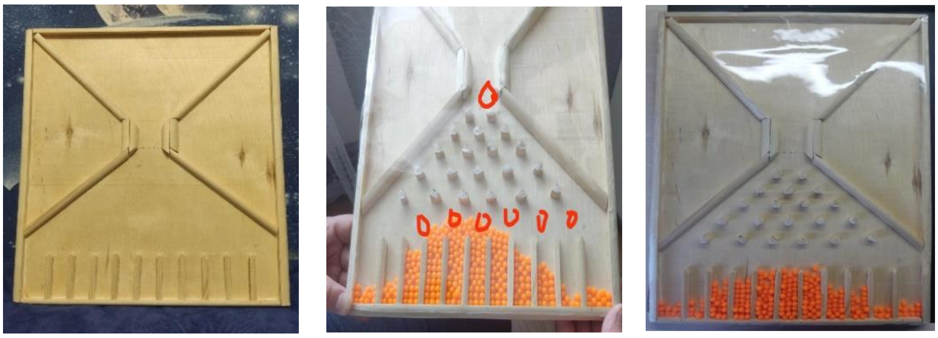


Рисунок 1-Доска Гальтона

Таким образом, сконструированную доску Гальтона можно использовать на уроках в школе. Проведенные эксперименты с использованием доски Гальтона позволяют получить результаты, которые можно интерпретировать с помощью статистических методов.

Мы попробовали найти простейшие примеры, которые можно визуализировать с помощью доски Гальтона.

Физика. Движение шариков на доске Гальтона аналогично движению молекул в газе, где столкновения молекул определяют их траектории и распределение энергии. В результате столкновения с друг с другом молекулы идеального газа изменяют не только направление своего движения, но и скорость. Если предположить, что сначала все молекулы идеального газа, двигаясь хаотически, имели один и тот же модуль скорости, то уже после первого столкновения часть молекул изменит свою скорость. Опыт Штерна заключает в себе идею распределение частиц по скоростям. Наиболее вероятная скорость, которой обладает максимальное число молекул. На рисунке 4 представлено распределение скоростей молекул, которое и можно продемонстрировать с помощью доски Гальтона.

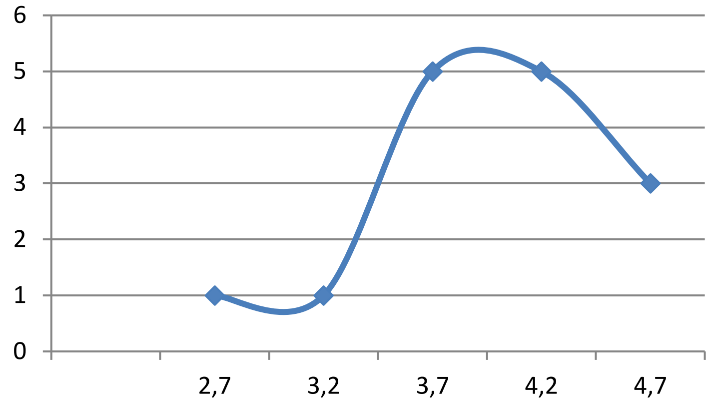
Рисунок 4- График распределения скоростей в опыте Штерна

Математика. Построим кривую нормального распределения, иллюстрирующих вероятность распределения среднего балла. Мы взяли средний балл учеников по предмету в одном из классов (чтобы не раскрывать персональные данные не будем указывать класс и предмет). Сгруппировали близкие значения среднего балла, оформили таблицу 1 и построили график (рис.2).

Таблица 1- Средний балл по предмету

Интервал среднего балла	Количество учеников
2,5-2,9	1
3-3,4	1
3,5-3,9	5
4-4,4	5
4,5-5	3

Количество учеников



Средний балл

Рисунок 2- Вероятность распределения среднего балла

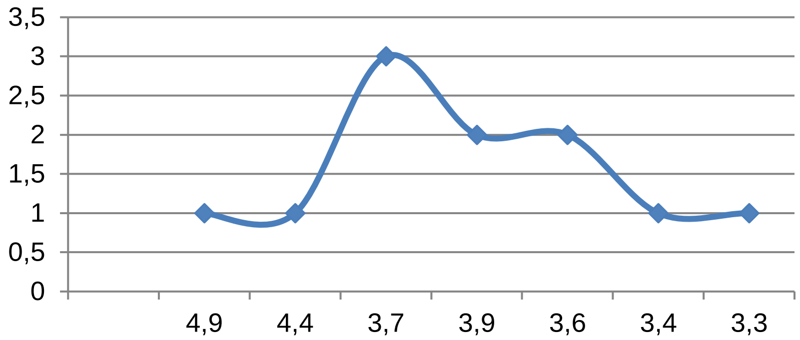
Биология. Построение вариационной кривой изменения признаков на примере ширины листьев комнатных растений. В роли изучаемого объекта выбрали два цветка аглаонему и фиалку. Измерили ширину каждого листка растения и составили таблицу 2 и построили графики (рис.3).

Таблица 2-Ширина листьев комнатных цветов

Аглаонема 		Фиалка 	
Длина листа, см	Количество листьев	Длина листа, см	Количество листьев
4,9	1	4,9	1
4,4	1	4,4	1
3,7	3	3,7	3
3,9	2	3,9	2
3,6	2	3,6	2
3,4	1	3,4	1
3,3	1	3,3	1

Количество листьев

Аглаонема



Ширина листа, см

Количество листьев

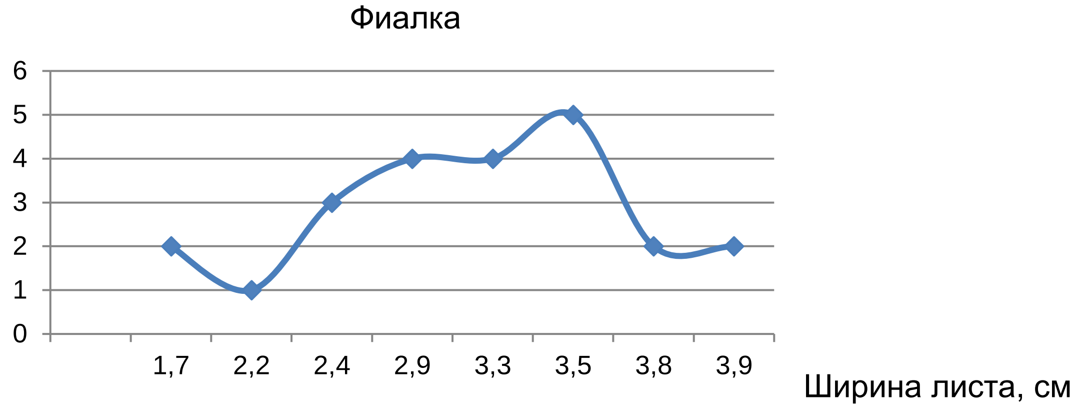


Рисунок 3- Графики распределения ширины листа комнатных растений

Видим, что полученные кривые в наших примерах по форме близки к кривой нормального распределения, которые и можно продемонстрировать с помощью доски Гальтона.

В ходе исследовательской работы гипотеза подтвердилась: с помощью доски Гальтона можно демонстрировать статистические процессы в разных научных областях.

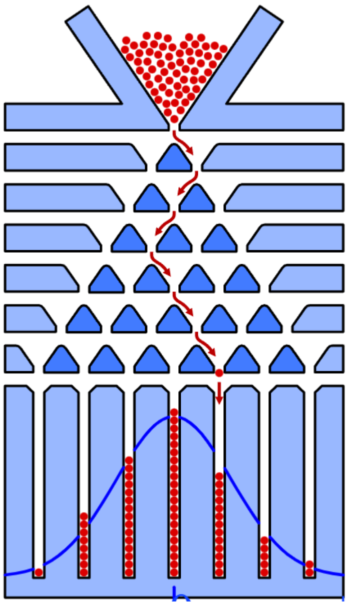
Задачи исследования выполнены: сконструирована доска Гальтона, рассмотрены основные аспекты использования доски Гальтона и ее физические свойства.

Проведя исследование, пришли к выводам: многие процессы в науке и жизни имеют вероятностный характер; с помощью доску Гальтона можно использовать на уроках математики, вероятности и статистики, физики, биологии, экономики. Результаты исследования представлены одноклассникам, сконструированная доска Гальтона будет подарена кабинету физики. Результатами исследования могут воспользоваться учителя и школьники.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. ФИПИ [сайт].- URL: https://fipi.ru/ege/otkrytyy-bank-zadaniy-ege (дата обращения: 03.02.2024).
2. Нужен ли школе новый предмет "Вероятность и статистика" [сайт].- URL: https://dzen.ru/a/ZPwbk6UYcHqOwF9O (дата обращения: 03.02.2024).
3. Братухин Ю. К., Путин Г. Ф. Б 87 Обработка экспериментальных данных: Учебное пособие. – 2003. [сайт].- URL: https://elis.psu.ru/ebooks/download/source/338003/Obrabotka_eksperimentalnyh_dannyh.pdf (дата обращения: 03.02.2024).
4. Валерий К., Лемиш В., Ширшова Т. Фрэнсис Гальтон: учёный-энциклопедист, один из первых создателей теории педагогических измерений к 190-летию со дня рождения Ф. Гальтона (1822-1911 гг.) // Педагогические измерения. – 2012. – №. 1. – С. 3-16.
5. Генденштейн Л.Э. Физика(в 2 частях).8 класс.Ч.1: учебник/ Л.Э.Генштейн, А.А.Булатова и др.;под ред.В.А.Орлова.-М.:БИНОМ. Лаборатория знаний,2019.-224.:ил.
6. ГенденштейнЛ.Э. Физика (в 2 частях).10 (базовый и углубленный уровень) класс.Ч.1: учебник/Л.Э.Генштейн, А.А.Булатова и др.; под ред.В.А.Орлова.-М.:БИНОМ.Лаборатория знаний,2019.-240.:ил.
7. Смолуховский М. О понятии случайности и о происхождении законов вероятностей в физике // Успехи физических наук. – 1927. – Т. 7. – №. 5. – С. 329-349.
8. Касьянов В.А. Физика10 класс Учебник для общеобразоват.учереждений.-6-е изд.,стереотип.-М.: Дрофа,2004.-416с.:ил.

Приложение 1 Схема доски Гальтона



ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ОЦЕНКИ ПРИ РЕШЕНИИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ, НЕРАВЕНСТВ И ИХ СИСТЕМ

Полубоярцев Данил Дмитриевич
Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение лицей при ТПУ, 10 класс
г. Томск
Руководитель: Киреенко Светлана Григорьевна, учитель математики МБОУ лицей при ТПУ

В школьной программе рассматриваются некоторые стандартные приемы решения уравнений, неравенств, а также их систем. Но на олимпиадах и экзаменах ученики часто сталкиваются с заданиями, требующими применения нетрадиционных приемов, к которым относится *метод оценки*. Особенно он востребован в задачах с параметрами.

История метода оценки в математике начинается с древних времен, когда в Древней Греции были разработаны основы теории чисел и геометрии, что позволило оценить размеры объектов и расстояния. В средние века оценка стала более формальной и систематической благодаря работам таких математиков, как Дирихле и Вейерштрасс. Они разработали теорию пределов, которая стала основой для оценки бесконечно малых величин. С развитием математического анализа в 17–18 веках оценка стала ключевым инструментом для изучения функций и их свойств. Лейбниц и Ньютон разработали методы дифференциального и интегрального исчисления, которые позволили оценивать скорость изменения функции и ее площадь под графиком. Сегодня оценка является неотъемлемой частью большинства математических дисциплин [1].

Простыми словами, метод оценки — это метод решения уравнений и неравенств, основывающийся на исследовании ограниченности области значений функции ($E(f)$) сверху или снизу на некотором множестве [2].

Цель работы — научиться применять метод оценки при решении тригонометрических уравнений, неравенств и их систем, рассказать учащимся об эффективности и необходимости применения метода оценки для успешного решения задач.

Задачи:

1. Изучить теоретический материал по теме «Область значений функций».
2. Опираясь на литературные источники и интернет, рассмотреть примеры решения задач методом оценки. Научиться распознавать и решать задачи, в которых является целесообразным применение ограниченности функций.
3. Самостоятельно составить несколько подобных задач и проиллюстрировать их решение.
4. Создать руководство по решению задач на применение метода оценки.

Функцию $f(x)$ называют ограниченной сверху или снизу, если ее область значений $E(f)$ ограничена сверху или снизу, а числовое множество X называют ограниченным сверху или снизу, если существует такое число M, что для всех x из множества X выполняется неравенство $x \le M$ ($x \ge M$). Множество, ограниченное и сверху, и снизу, называют ограниченным [3].

Основная идея метода оценки состоит в том, чтобы найти мажоранту (миноранту) данной функции. Мажорантой (минорантой) данной функции $f(x)$ на заданном промежутке называется такое число M, что или $f(x) \le M$ для всех x из данного промежутка, или $f(x) \ge M$ для всех x из данного промежутка. Само слово мажоранта (миноранта) происходит от французского majorer (minorer), что в переводе означает «объявлять большим (меньшим)».

Анализ литературных источников позволил сформулировать следующие критерии использования метода оценки:

– если в одной части соотношений стоят ограниченные функции, а в другой — конкретные числа;
– если в уравнении или неравенстве содержатся разного рода функции.

В целом решение тригонометрического уравнения обычно состоит из двух этапов:

– преобразование уравнения для получения его простейшего вида;
– решение полученного простейшего тригонометрического уравнения.

Преобразование уравнения сводится к применению формул тригонометрии и разложению выражения на сумму простейших тригонометрических функций. После этого необходимо оценить каждое из выражений, применяя область значений простейших функций тригонометрии. Таким образом, можно предложить следующий универсальный алгоритм решения задач на применение метода оценки.

Шаг 1. Запишите уравнение в виде суммы или разности тригонометрических функций.

Шаг 2. Оцените максимальное или минимальное значение каждой тригонометрической функции в уравнении. Это возможно, так как синус и косинус всегда находятся между –1 и 1. Если в задаче встречается тангенс, то его можно выразить через синус и косинус по формулам тригонометрии.

Шаг 3. Используйте полученные оценки для ограничения возможных значений переменных в уравнении. Это позволит сузить область поиска решений.

Шаг 4. Решите уравнение, используя ограничения, полученные на предыдущем шаге.

Шаг 5. Убедитесь, что полученное значение удовлетворяет области допустимых значений (далее — ОДЗ).

Для наглядности применения вышеизложенного алгоритма для метода оценки рассмотрим несколько примеров с пояснением каждого шага. Эти примеры затруднительно решить другими способами, поэтому вышеизложенный метод будет наиболее актуальным

Пример 1. Решить уравнение $\sin 5x \cdot \sin 7x = 1$.

Шаг 1. Раскладываем выражение по формуле произведения синусов:

$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$.

Получим $\frac{1}{2}(\cos(5x - 7x) - \cos(5x + 7x)) = 1$.

Преобразуем уравнение, упростив его: $\cos 2x - \cos\ 12x = 2$.

Шаг 2. Оценим каждое слагаемое в левой части уравнения сверху, так как решение есть только при максимальных значениях функций:

$\cos 2x \leq 1;\ -\cos 12x \leq 1$.

Шаг 3. Учитывая полученные ограничения, совершим равносильный переход:

$$\cos 2x - \cos 12x = 2 <=> \begin{cases} \cos 2x = 1, \\ \cos 12x = -1. \end{cases}$$

Шаг 4. Решаем получившиеся тригонометрические уравнения:

$$\begin{cases} 2x = 2\pi n, \\ 12x = \pi + 2\pi k; \end{cases} n,k \in Z \Rightarrow \begin{cases} x = \pi n, \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{6}, \ n,k \in Z, \end{cases}$$

$\pi n = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{6}, \ n,k \in Z, \ \ 12n = 1 + 2k, \ n,k \in Z.$

Это уравнение не имеет корней, так как $12n$ делится на 2, а 1+2k — нет.

Ответ: $x \in \varnothing$.

Пример 2. Решить уравнение $\sqrt{\cos 2x - \sin 3x} = -2\cos x$.

При помощи равносильного перехода избавляемся от радикала и применяем оценку:

$$\sqrt{\cos 2x - \sin 3x} = -2\cos x \iff \begin{cases} \cos 2x - \sin 3x = 4cos^2 x, \\ -2\cos x \geq 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \cos 2x - \sin 3x = 2(1 + cos2x), \\ \cos x \leq 0, \end{cases}$$

$\cos 2x - \sin 3x = 2 + 2cos2x,$

$-\cos 2x - \sin 3x = 2,$

$\cos 2x + \sin 3x = -2 \iff \begin{cases} \cos 2x = -1, \\ \sin 3x = -1, \end{cases}$ так как $-1 \leq \cos 2x$ и $-1 \leq \sin 3x$.

$$\begin{cases} 2x = \pi + 2\pi n, \ n,k \in Z, \\ 3x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \ n,k \in Z, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \ n,k \in Z, \\ x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}, n,k \in Z \end{cases} \Rightarrow \frac{\pi}{2} + \pi n = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}, \ n,k \in Z \Rightarrow$$

$\Rightarrow 2 + 3n = 2k, \ n,k \in Z \Rightarrow 2k \vdots 2 \Rightarrow 2 + 3n \vdots 2 \Rightarrow n = 2l, \ l \in Z \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi l, \ l \in Z.$

Отметим решения и убедимся, что они удовлетворяют неравенству cos x ≤ 0 на тригонометрической окружности (рис. 1).

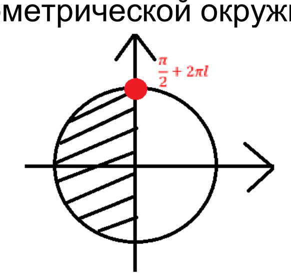


Рис. 1. Решения уравнения $\sqrt{\cos 2x - \sin 3x} = -2\cos x$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi l, l \in Z$.

Пример 3. Решить уравнение

$$\left(\cos\frac{x}{4} - 3\sin x\right)\sin x + \left(2 + \sin\frac{x}{4} - 3\cos x\right)\cos x = 0.$$

$\cos\frac{x}{4}\sin x - 3\sin^2 x + 2\cos x + \cos x \sin\frac{x}{4} - 3\cos^2 x = 0,$

$\sin\left(x + \frac{x}{4}\right) + 2\cos x = 3,$

$\sin\frac{5x}{4} + 2\cos x = 3 \iff \begin{cases} \sin\frac{5x}{4} = 1 \\ 2\cos x = 2 \end{cases}$, так как $\sin\frac{5x}{4} \leq 1$ и $2\cos x \leq 2$,

$$\begin{cases}\dfrac{5x}{4} = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, n, k \in Z, \\ \quad x = 2\pi k,\ n, k \in Z\end{cases} <=> \begin{cases}x = \dfrac{2\pi}{5} + \dfrac{8\pi n}{5},\ n, k \in Z, \\ \quad x = 2\pi k,\ n, k \in Z,\end{cases}$$

$\dfrac{2\pi}{5} + \dfrac{8\pi n}{5} = 2\pi k,\ \ n, k \in Z,$

$1 + 4n = 5k,\ n, k \in Z,$

$5k \vdots 5 => 1 + 4n \vdots 5 => n = 1 + 5l,\ l \in Z,$

$n = 1 + 5l => x = \dfrac{2\pi}{5} + \dfrac{8\pi(1 + 5l)}{5} = 2\pi + 8\pi l.$

Ответ: $x = 2\pi + 8\pi l,\ \ l \in Z.$

Пример 4. Найдите *a*, при которых уравнение имеет корни:
$2(tg^2 x + ctg^2 x + 2) + a^2 = 3a(tg\ x + ctg\ x).$

Пусть $tg\ x + ctg\ x = t$, тогда $tg^2\text{x} + ctg^2\text{x} + 2 = t^2$ и исходное уравнение примет вид $2t^2 + a^2 = 3at$,

$2t^2 + a^2 - 3at = 0 <=> (2t - a)(t - a) = 0 => t_1 = a,\ t_2 = \dfrac{a}{2}.$

Из неравенства Коши следует:

если $tg\ x > 0$, то $tg\ x + \frac{1}{tg\ x} \geq 2$,

если $tg\ x < 0$, то $tg\ x + \frac{1}{tg\ x} \leq -2$.

Значит, первоначальное уравнение имеет решения, если хотя бы один из корней t_1 или t_2 будет принадлежать множеству $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$:

1) $t_1 \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$ при $a \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$;

2) $t_2 \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$ при $a \in (-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$.

Ответом будет являться объединение этих двух множеств.

Ответ: $a \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

Пример 5. Найти все пары действительных чисел (*x*, *y*), при которых выполняется неравенство $\cos x - y^2 \geq \sqrt{y - x^2 - 1}$ [4].

$y - x^2 - 1 \geq 0 => y \geq x^2 + 1 => y \geq 1$, так как $x^2 \geq 0$.

Зная, что $y \geq 1$, а $\cos x \leq 1$, получаем $\cos x - y^2 \leq 0$, в то время как правая часть неравенства неотрицательна. Имеем

$$\begin{cases}\cos x - y^2 = 0, \\ y - x^2 - 1 = 0\end{cases} <=> \begin{cases}\cos x = y^2, \\ y = x^2 + 1\end{cases} <=> \begin{cases}\cos x = 1, \\ \quad y = 1, \\ y = x^2 + 1\end{cases} => \begin{cases}\qquad x = 0, \\ \qquad y = 1, \\ \cos 0 = 1 \text{ (верно)}.\end{cases}$$

Ответ: (0; 1).

Пример 6. Решить уравнение $sin^9 x + cos^{11} x = 1.$

Оценим выражения $sin^9 x$ и $cos^{11} x$:

$sin^9 x \leq sin^2 x$ и $cos^{11} x \leq cos^2 x$ для любого *x*.

Значит, $sin^9 x + cos^{11} x \leq sin^2 x + cos^2 x = 1.$

Следовательно, исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} sin^9x = sin^2x, \\ cos^{11}x = cos^2x \end{cases} <=> \begin{cases} sin^2x(\,sin^7x - 1) = 0, \\ cos^2x(cos^9x - 1) = 0 \end{cases} <=>$$

$$<=> \begin{cases} \left[\begin{array}{l} sinx = 0, \\ sinx = 1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} cosx = 0, \\ cosx = 1 \end{array}\right. \end{cases} <=> \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \pi n,\ n \in Z, \\ x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z, \\ x = 2\pi k,\ k \in Z. \end{array}\right. \end{cases}$$

Ответ: $2\pi n,\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$.

Пример 7. При каких значениях параметра *a* неравенство
$23\cos x - 17|\cos x + y - 3a - 1| + 4|\cos x - 3y + 7a - 1| \leq 31$
выполняется для всех пар (*x*; *y*)? [5]

Обозначим $\cos x$ за *t*, тогда $-1 \leq t \leq 1$,
$23t - 17|t + y - 3a - 1| + 4|t - 3y + 7a - 1| - 31 \leq 0$, (*)
$f(t) = 23t - 17|t + y - 3a - 1| + 4|t - 3y + 7a - 1| - 31$.

При любом раскрытии модулей функция *f*(*t*) будет иметь вид *kx* + *b*, где *k* > 0 (так как $23 > \pm 17 \pm 4$), а значит, *f*(*t*) возрастает на [–1; 1].

Чтобы неравенство (*) выполнялось для всех $|t| \leq 1$ потребуем *f*(1) ≤ 0.

Получим неравенство $23 - 17|y - 3a| + 4|3y - 7a| - 31 \leq 0$ или
$17|y - 3a| - 4|3y - 7a| + 8 \geq 0$. (**)

Пусть $g(y) = 17|y - 3a| - 4|3y - 7a| + 8$.

– Если $y \leq 3a$, то $g(y) = -17y + 51a - 4|3y - 7a| + 8$, а значит, *g*(*y*) убывает на $(-\infty;\ 3a]$.

– Если $y \geq 3a$, то $g(y) = 17y - 51a - 4|3y - 7a| + 8$. Поэтому *g*(*y*) возрастает на $[3a;\ +\infty)$.

Чтобы неравенство (**) выполнялось для всех *y*, потребуем $g(3a) \geq 0$.

Решим это неравенство:
$-4|9a - 7a| + 8 \geq 0$,
$|2a| \leq 2, |a| \leq 1$.

Ответ: $-1 \leq a \leq 1$.

На основании рассмотренных примеров можно сделать вывод, что этот эффективный метод позволяет решать тригонометрические задачи, используя оценку значений функции, что позволяет сузить область поиска и получить правильные решения.

Уравнения и неравенства для *самостоятельной работы*:

1. cos *x* cos 3*x* ≥ 1. Ответ: *x* = $\pi n,\ n \in Z$.
2. sin 2*x* – sin 6*x* + 2 = 0. Ответ: *x* = $-\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$.
3. cos *x* = $x^2 + 1$. Ответ: 0.
4. $\sin^{2024}x + \cos^{2023}x = 1$. Ответ: $\pm\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ 2\pi k,\ n, k \in \mathrm{Z}$.
5. $\sin x - 2\cos\ 2x = 3$. Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathrm{Z}$.

Выводы: Автором работы был изучен теоретический материал по теме «Область значений функции», показано практическое применение метода оценки для решения тригонометрических уравнений, неравенств и их систем, самостоятельно составлены задачи на применение вышеизложенного метода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шестаков С.А.* ЕГЭ 2020. Математика. Задачи с параметром. Задача 18 (профильный уровень) / Под ред. И.В. Ященко. – М.: МЦНМО, 2020. – 288 с.
2. *Смоляков А.Н*. Тригонометрические, показательные и логарифмические неравенства. – М.: Илекса, Народное образование, 2008. – 352 с.
3. *Бородуля И.Т*. Тригонометрические уравнения и неравенства: Кн. для учителя. – М.: Просвещение, 1989. – 239 с.
4. *Азаров А.И., Гладун О.М., Кремень Ю.А., Федосенко В.С*. Алгебраические уравнения и неравенства: Учебное пособие. – Минск: ООО «Тривиум», 1997. – 128 с.
5. *Гриншпон Я.С., Киреенко С.Г*. Функциональные методы решения уравнений, неравенств и их систем: Учебно-методическое пособие. – Томск: Изд-во ТГУ, 2022. – 96 с.

МАКЕТ ПАРКА «АЛИСА В СТРАНЕ ЧУДЕС»

Смердина Яна Ярославовна

Муниципальное автономное общеобразовательное учреждение «Средняя общеобразовательная школа № 4 имени Героя Советского Союза Ефима Афанасьевича Жданова»,

11 класс

г. Колпашево

Руководитель: Склярова Марина Михайловна, учитель математики МАОУ «СОШ № 4 им. Е.А. Жданова» г. Колпашево

Ландшафтный дизайнер — это специалист, который проектирует и создает дизайн парков, скверов, садов и придомовых участков. Он продумывает все детали территории: растения, дорожки, освещение, детские площадки, скамейки, урны и так далее. Его задача — сделать пространство красивым, стильным и комфортным для людей.

В этом году я решила поучаствовать в творческом конкурсе по созданию макетов «Городская архитектура» от университета ТГАСУ. Я выбрала номинацию «Макет парка или зеленой зоны с лучшим ландшафтным решением».

Гипотеза: использование современных технологий позволяет создать архитектурный макет парка и позволяет оценить объект в деталях, определить достоинства и недостатки на стадии проектирования., а также изменить на начальной стадии те или иные детали проекта в лучшую сторону.

Актуальность: Макетирование позволяет создавать прототипы различных объектов, систем и идей, чтобы реализовать их на практике. В нашем мире огромным спросом пользуется озеленение и облагораживание территорий, поэтому оно применяется во многих областях, таких как дизайн, архитектура и многие другие.

Цель работы: создание макета парка с лучшим ландшафтным решением
Предмет исследования: Ландшафтный дизайн
Результат проекта: Макет парка «Алисы в Стране чудес»
Задачи работы:
1) Узнать из различных интернет - источников о макетировании
2) Разработать концепт парка
3) Приобрести все необходимые материалы для его реализации
4) Спроектировать макет

Глава 1. Общая характеристика макетирования

1.1. Что такое макетирование

Макетирование – это процесс проектно-исследовательского моделирования, в функции которого входит наглядное изучение характеристик проектируемого объекта. С помощью макетирования можно создать объемную визуализацию, благодаря которой можно оценить размеры территории и пространства, а также пропорции различных поверхностей. Главная задача дизайнера – выбрать наиболее подходящий масштаб, фактуру и цветовую гамму для макета, чтобы он мог максимально точно продемонстрировать все особенности и преимущества объекта.

В современном мире трудно найти ту область, где не понадобится задействие макетов различной направленности. В первую очередь, макетирование необходимо в строительной, архитектурной, маркетинговой и даже промышленной сфере. В некоторых из этих областей нужна наиболее высокая степень детализации проекта.

При разработке промышленных макетов обязательна наглядная демонстрация функционирования различного оборудования или деталей в миниатюре и представление динамических процессов. В маркетинговой сфере идет упор на качественную визуализацию объекта для его дальнейшей демонстрации на выставках или тендерах. В области дизайна зачастую прибегают к компромиссу между идеями клиента и техническими ограничениями при разработке макета.

Существует несколько типов макетов в зависимости от их роли, функции и задач проектирования:

* Архитектурные — макеты зданий и сооружений.
* Технические — проекты машин, механизмов и другой техники.
* Планировочные (градостроительные) — создают общее представление о планировке объекта.
* Промышленные — создаются при строительстве заводских комплексов, комбинатов, фабрик и других предприятий.
* Концептуальные — выражают идею или замысел проекта, показывают план заполнения пространства, стиль, концепцию.
* Подарочные — достаточно широкое понятие, сюда могут относиться и архитектурные, и технические, и даже концептуальные макеты.
* Рекламные — привлекают внимание, показывают потенциальному клиенту выгоды и достоинства проекта.
* Также выделяют демонстрационные, театральные, проверочные, интерьерные, натурные и другие виды макетов.

1.2. Кто такой ландшафтный дизайнер

Ландшафтный дизайнер – это специалист, занимающийся проектированием и дизайном садов, участков, парков и скверов. В его обязанности входит общение с клиентом, разработка проекта с учетом особенностей участка, подготовка документов – генплана, дендроплана, чертежей, смет, 3D-визуализаций, и конечно, непосредственно реализация проекта.

Всегда приятно гулять по ухоженным дорожкам цветущего сада, в котором растения гармонично сочетаются друг с другом. Часто все смотрится так естественно, что даже сложно представить, что это результат кропотливой работы ландшафтного дизайнера.

Глава 2.Мои исследования

2.1. Практическая работа. Разработка концепта

За идею я взяла сказку Льюиса Кэррола «Алиса в Стране чудес». Изначально, был выбор создания парка со злодеями из народных сказок по типу Бабы Яги и Кощея Бессмертного. Целю было сделать что то новое и запоминающиеся, на что было бы интересно смотреть и разглядывать детали. В конечном итоге, было решено оставить идею с Зазеркальем.

Для начала, я набросала несколько эскизов, чтобы определиться, как будет расположен парк, и как именно он будет выглядеть. Далее нужно было купить все необходимые вещи для его создания. За выбор местности я решила взять наш городской парк, а именно огромное пустое пространство в его центре, где можно было бы идеально разместить все задуманные элементы, а именно: Дом белого кролика и саму фигуру сказочного животного, объемные игровые 3D шахматы, карточные солдаты Червонной Королевы на входе в парк, качели-грибы, фигура Чеширского Кота на дереве с табличками указателями на выходе из парка, а также скамейки, фонари, урны, деревья, кустарники, газон.

2.2. Выбор материалов

Для создания макета были использованы: растительные присыпки, эко-мох, искусственная трава для газона, стеклянные бусины для фонарей, металлические цепи для качелей, обычная губка, мини доски для моделизма, полимерная глина и инструменты для работы с ней, пенопласт для основы макета, садовая проволока, медная проволока, клей, акриловые краски, наждачная бумага для имитации асфальта, картон, коричневая изолента, лак акрил-строительный

С закупкой всех материалов и инструментов, начиная от пенопласта и заканчивая деревянными дощечками для скамеек, мне помогла моя мама. Она также приняла большое участие в самом создании макета, на который нам давалось около 3-х недель. Без ее помощи, я навряд ли бы успела закончить его в срок.

2.2.1. Создание макета

В работе мне пришлось столкнуться со множеством трудностей. Например, я впервые лепила из полимерной глины, из-за этого я по несколько раз переделывала фигурки. Все детали для дома кролика я переделывала три раза.

Я впервые взялась за создание искусственных деревьев. Их было делать немного легче. Для их моделирования я использовала медную и садовую проволоку, а также искусственный мох.

Хочется отметить, как реалистично и детализировано получилось у моей мамы сделать шахматы и качели. Они также сделаны вручную, из полимерной глины.

Была проделана огромная работа, для осуществления задуманной идеи, и в конечном итоге, получилось даже лучше, чем предполагалось.

Это только малая часть того, что пришлось сделать, для реализации поставленной цели, но результат определенно того стоил. Безусловно, это был полезный и незабываемый опыт. Несмотря на все трудности, мне понравилось работать над этим макетом, и я с удовольствием сделала бы что-то подобное еще раз!

Заключение

Цель и задачи, поставленные мною в начале работы, выполнены. Я нашла и проанализировала информацию, сформировала выводы о своем проекте.

Гипотеза, поставленная в начале, подтверждена: с помощью современных технологий можно создать архитектурный макет парка и оценить объект в деталях, определить достоинства и недостатки на стадии проектирования, изменить в начале работы те или иные детали проекта в лучшую сторону. Я сделала вывод, что макет имеет как свои плюсы, так и минусы. Из плюсов: проработанные детали, использование качественных материалов, интересный концепт.

Из минусов я бы выделила количество деревьев, которых недостаточно, чтобы покрыть все пустые зоны на объекте, из-за чего может создаваться ощущение пустоты.

Собранная информация и опыт, который я получила при проектировании макета парка, может стать полезным в дальнейших работах. Макет парка можно использовать для участия в различных конкурсах или как украшение для дома.

Практическая значимость: данным материалом можно воспользоваться для проведения урока изобразительного искусства

Несмотря на все трудности, мне понравилось работать над этим макетом, и я с удовольствием сделала бы что-то подобное еще раз!

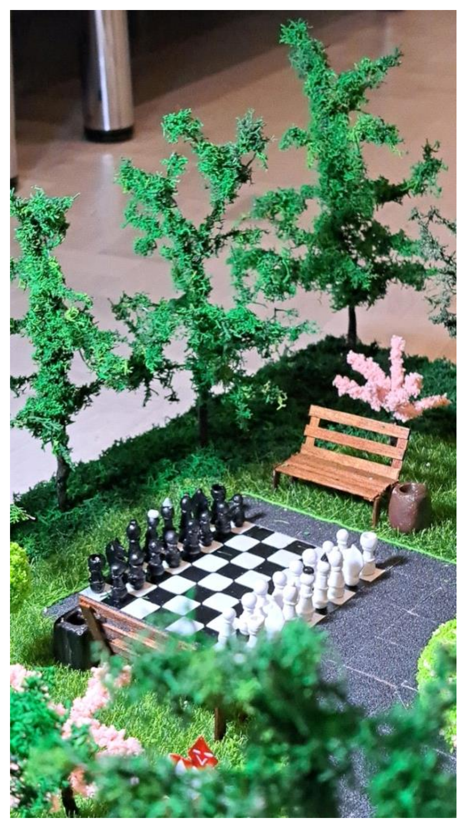
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

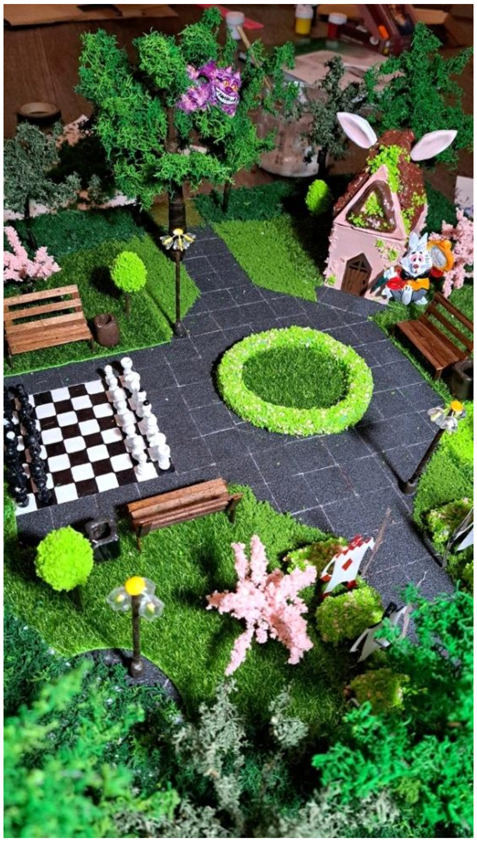
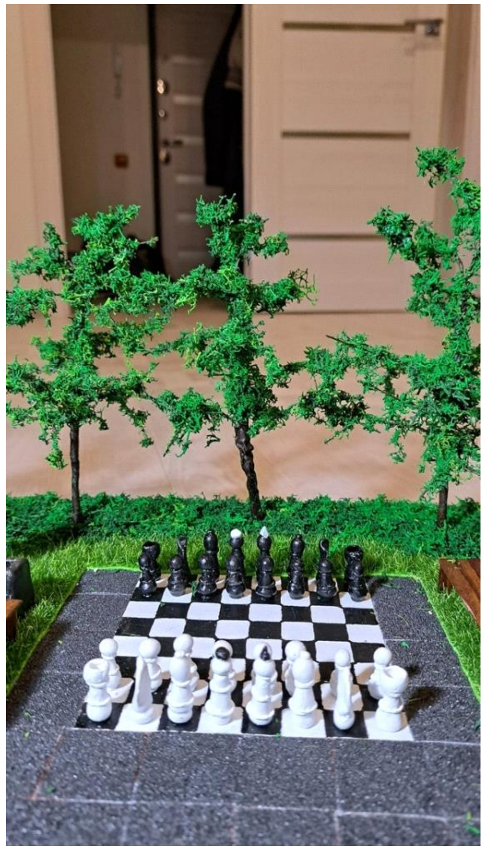
1. https://www.maketnaya-laboratoriya.ru/novosti/maketirovanie-obshhie-svedeniya-klassifikaciya-i-specifika-processa.html
2. https://www.maket-prof.ru/poleznaya_informaciya/vidy_maketov_i_ih_klassifikaciya
3. https://www.kp.ru/putevoditel/obrazovanie/dizajner/landshaftnyj-dizajner/

ПРИЛОЖЕНИЕ

Готовый результат





ЗАЧЕМ МНЕ НУЖНА МАТЕМАТИКА

Степанов Роман Дмитриевич
Муниципальное автономное общеобразовательное учреждение гимназия №2,
8 класс
г. Асино
Руководитель: Чугунова Наталья Васильевна, учитель математики МАОУ гимназии №2

Если задуматься всерьез, то мы применяем математику каждый день. Нам все время приходится выполнять простые и сложные математические операции – посчитать, через сколько минут начнется любимый фильм, сколько сдачи должны дать в магазине, когда приедет автобус.

Благодаря математике можно планировать свое время. Мои родители всегда планируют семейный бюджет на месяц, считают, сколько нужно заплатить за коммунальные услуги.

Взрослые утверждают, что им очень часто приходится решать задачи с математическим содержанием в повседневной жизни, особенно решать задачи на проценты, и ежедневно решать задачи, связанные с товарно-денежными отношениями. Я решил выяснить, как часто люди в жизни сталкиваются с математическими задачами в быту и повседневной жизни. Я провел исследование по теме "зачем мне нужна математика в повседневной жизни" и хотел узнать у одноклассников, так ли важна эта тема в жизни взрослых и старшеклассников.

Актуальность: Сегодня жизнь такова, что настоятельно требует, чтобы ученик имел развитое математически-экономическое мышление и был готов к жизни в условиях рыночных отношений.

В нашей повседневной жизни мы настолько привыкли к математике, что даже не замечаем, что пользуемся ею постоянно. А ведь вопрос «А зачем нам нужна математика?» актуален и до сих пор ученики его задают. Я попытался рассмотреть все виды ежедневной деятельности человека и показать, что математические знания применяются не только в учебно-познавательном процессе, но и в повседневной жизни, продемонстрировать оптимальность применения математических знаний

Гипотеза: если научиться решать задачи с математическим содержанием в быту и повседневной жизни, то это поможет не сделать ошибок на экзаменах, разбираться в товарно-денежных отношениях, быть практичнее.

Объект исследования: математические знания, умения и навыки.

Предмет исследования: использование математических знаний в быту и повседневной жизни человека.

Цель: показать широту применения математики в повседневной жизни человека, доказать, что без математики в повседневной жизни, не обойтись.

Для реализации поставленной цели мной были сформулированы следующие *задачи:*

- выяснить роль математики в повседневной жизни;
- продемонстрировать оптимальность применения математических знаний в повседневной жизни
- отобрать нужные задачи из сборников ОГЭ и ЕГЭ;
- сделать выводы по результатам исследования.

Методы исследования:

- подбор и изучение литературы и интернет - ресурсов;
- опрос;
- анализ, сравнение, выводы.

Основная часть

Опрос

В начале своего исследования я провел анкетирование. В опросе приняло участие 32 человека (29 – 8А, 3 – 8В). По вопросам анкеты составил диаграммы и сравнительные таблицы.

Расставьте числа от 1 до 10, показывающие степень того, насколько нужны математические знания в определенной сфере жизни.

Сфера жизнедеятельности	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	среднее арифметическое
ЖКХ	2	1	1	3	4	1	4	2	6	8	$\frac{218}{32}$=6,8
Покупки	2	3	1	1	6	1	0	10	3	5	$\frac{208}{32}$=6,5
Вклады в банки	0	1	3	0	3	0	4	5	5	11	$\frac{249}{32}$=7,8
Домашнее хозяйство	4	2	7	1	6	2	5	1	2	2	$\frac{114}{32}$=3,6
Бизнес	1	1	1	0	0	1	3	2	8	15	$\frac{271}{32}$=8,5

В пункте «Другое» были выделены следующие сферы:

- игры (покупки) – 1 человек (10)
- изобретение машин-1 человек (10)
- наука – 1 человек (10)
- Баскетбол- 2 человека- (7; 2)
- подсчет результатов соревнований -1 человек (9)
- готовка обедов -1 человек (6)
- Макияж – 2 человека (4; 6)

Выводы:

- ✓ 23 человека (72%) респондентов считают, что математика нужна в повседневной жизни.
- ✓ Большинство респондентов выше всего оценили необходимость математики в бизнесе, банковских операциях. Далее идет сфера ЖКХ, покупки и домашнее хозяйство.
- ✓ Количество опрошенных семиклассников, пользующихся математикой постоянно или часто, составило 74%.

Решение задач

Просматривая задачи контрольно измерительных материалов по ОГЭ и ЕГЭ, я нашел те, которые, во-первых, дают представление о том, какие расчеты могут понадобиться в повседневной жизни, во-вторых, среди них есть такие, которые я могу решить. Например,

1) *Семья из трех человек едет из Санкт-Петербурга в Вологду. Можно ехать поездом, а можно — на своей машине. Билет на поезд на одного человека стоит*

660 рублей. Автомобиль расходует 8 литров бензина на 100 километров пути, расстояние по шоссе равно 700 км, а цена бензина равна 19,5 рублей за литр. Сколько рублей придется заплатить за наиболее дешевую поездку на троих? [2]

Решение: 1)700:100=7

2)7*8=56 л.

3)19.5*56=1092 руб

Ответ:1092 рубля

2) Тип 1 № 77333

1 киловатт-час электроэнергии стоит 1 рубль 80 копеек. Счетчик электроэнергии 1 ноября показывал 12 625 киловатт-часов, а 1 декабря показывал 12 802 киловатт-часа. Сколько рублей нужно заплатить за электроэнергию за ноябрь?

*(12802-12625)*1.8=318.6 руб* [2]

Ответ: 318,6 рублей

3) Тип 6 № 26688

Своему постоянному клиенту компания сотовой связи решила предоставить на выбор одну из скидок. Либо скидку 25% на звонки абонентам других сотовых компаний в своем регионе, либо скидку 5% на звонки в другие регионы, либо 15% на услуги мобильного интернета. Клиент посмотрел распечатку своих звонков и выяснил, что за месяц он потратил 300 рублей на звонки абонентам других компаний в своем регионе, 200 рублей на звонки в другие регионы и 400 рублей на мобильный интернет. Клиент предполагает, что в следующем месяце затраты будут такими же, и, исходя из этого, выбирает наиболее выгодную для себя скидку. Какую скидку выбрал клиент? В ответ запишите, сколько рублей составит эта скидка. [2]

1) 1)300*0,25=75 руб - скидка
2) 2)200*0,05=10 руб - скидка
3) 3)400*0,15=60 руб - скидка

25% в другие регионы

Ответ: 75 рублей

4) Тип 20 № 99587

Компания «Альфа» начала инвестировать средства в перспективную отрасль в 2001 году, имея капитал в размере 5000 долларов. Каждый год, начиная с 2002 года, она получала прибыль, которая составляла 200% от капитала предыдущего года. А компания «Бета» начала инвестировать средства в другую отрасль в 2003 году, имея капитал в размере 10 000 долларов, и, начиная с 2004 года, ежегодно получала прибыль, составляющую 400% от капитала предыдущего года. На сколько долларов капитал одной из компаний был больше капитала другой к концу 2006 года, если прибыль из оборота не изымалась? [1]

200% - 2; 400% - 4

1)5000+5000*2=15000 - 2002г.

2)15000+15000*2=45000 – 2003г.

3)45000+45000*2=135000 – 2004г.

4)135000+135000*2=405000 – 2005г.

5)405000+405000*2=1215000 – 2006г.(Альфа)

6)10000+10000*4=50000 – 2004г.

7)50000+50000*4=250000 – 2005г.

8)250000+250000*4=1250000 – 2006г.(Бета)

9)1250000-1215000=35000

Ответ:35000$ - разница

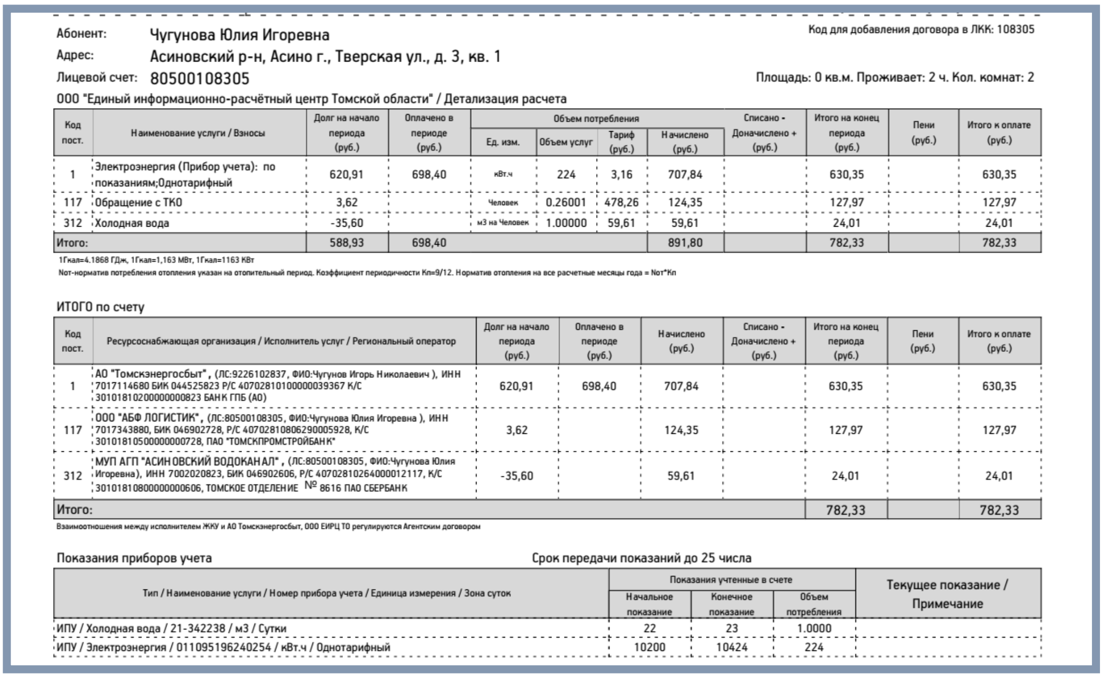
Как задачи практической направленности представлены на ОГЭ и ЕГЭ

Проанализировав варианты контрольно – измерительных материалов, я составил таблицу уровня представления данных задач на экзаменах.

Вид экзамена	Всего заданий в КИМе	Номера задач с практическим содержанием	Количество задач с практическим содержанием	% от общего количества
9 класс ОГЭ	25	1-5, 12, 14, 21	8	16
11 класс ЕГЭ базовый уровень	21	1, 2, 4,5,6,8,10,15,20,21	10	Около 50
11 класс ЕГЭ профильный уровень	18	3,4,8,9,15,18	6	33

<u>Вывод:</u> Задачи с практическим содержанием на государственных экзаменах представлены достаточно широко: от 16% (9 класс) до 50% (11 класс) от общего количества задач в КИМах.

Практическая задача



Абонент: Чугунова Юлия Игоревна　　Код для добавления договора в ЛКК: 108305

Адрес: Асиновский р-н, Асино г., Тверская ул., д. 3, кв. 1

Лицевой счет: 80500108305　　Площадь: 0 кв.м. Проживает: 2 ч. Кол. комнат: 2

ООО "Единый информационно-расчётный центр Томской области" / Детализация расчета

Код пост.	Наименование услуги / Взносы	Долг на начало периода (руб.)	Оплачено в периоде (руб.)	Объем потребления				Списано - Доначислено + (руб.)	Итого на конец периода (руб.)	Пени (руб.)	Итого к оплате (руб.)
				Ед. изм.	Объем услуг	Тариф (руб.)	Начислено (руб.)				
1	Электроэнергия (Прибор учета): по показаниям;Однотарифный	620,91	698,40	кВт.ч	224	3,16	707,84		630,35		630,35
117	Обращение с ТКО	3,62		Человек	0.26001	478,26	124,35		127,97		127,97
312	Холодная вода	-35,60		м3 на Человек	1.00000	59,61	59,61		24,01		24,01
Итого:		588,93	698,40				891,80		782,33		782,33

1Гкал=4.1868 ГДж, 1Гкал=1,163 МВт, 1Гкал=1163 КВт

Нот-норматив потребления отопления указан на отопительный период. Коэффициент периодичности Кп=9/12. Норматив отопления на все расчетные месяцы года = Нот*Кп

ИТОГО по счету

Код пост.	Ресурсоснабжающая организация / Исполнитель услуг / Региональный оператор	Долг на начало периода (руб.)	Оплачено в периоде (руб.)	Начислено (руб.)	Списано - Доначислено + (руб.)	Итого на конец периода (руб.)	Пени (руб.)	Итого к оплате (руб.)
1	АО "Томскэнергосбыт", (ЛС:9226102837, ФИО:Чугунов Игорь Николаевич), ИНН 7017114680 БИК 044525823 Р/С 40702810100000039367 К/С 30101810200000000823 БАНК ГПБ (АО)	620,91	698,40	707,84		630,35		630,35
117	ООО "АБФ ЛОГИСТИК", (ЛС:80500108305, ФИО:Чугунова Юлия Игоревна), ИНН 7017343880, БИК 046902728, Р/С 40702810806290005928, К/С 30101810500000000728, ПАО "ТОМСКПРОМСТРОЙБАНК"	3,62		124,35		127,97		127,97
312	МУП АГП "АСИНОВСКИЙ ВОДОКАНАЛ", (ЛС:80500108305, ФИО:Чугунова Юлия Игоревна), ИНН 7002020823, БИК 046902606, Р/С 40702810264000012117, К/С 30101810800000000606, ТОМСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ № 8616 ПАО СБЕРБАНК	-35,60		59,61		24,01		24,01
Итого:						782,33		782,33

Взаимоотношения между исполнителем ЖКУ и АО Томскэнергосбыт, ООО ЕИРЦ ТО регулируются Агентским договором

Показания приборов учета　　Срок передачи показаний до 25 числа

Тип / Наименование услуги / Номер прибора учета / Единица измерения / Зона суток	Показания учтенные в счете			Текущее показание / Примечание
	Начальное показание	Конечное показание	Объем потребления	
ИПУ / Холодная вода / 21-342238 / м3 / Сутки	22	23	1.0000	
ИПУ / Электроэнергия / 011095196240254 / кВт.ч / Однотарифный	10200	10424	224	

Например, электроэнергия:

1)698,40-620,91= 77,49 (рублей) - переплата
2)10424-10200=224 (кВт.ч) – расход электроэнергии за месяц
3)224·3,16-77,49=630,35 (рублей) – нужно заплатить в текущем месяце.
<u>Вывод:</u> Получив такой платежный документ, я смогу проверить начисление услуг ЖКХ.

Математика в моей будущей профессии

Я мечтаю стать астрофизиком.
В сети интернет я нашел несколько интересных фактов.

Вес предмета на Земле в 100 кг, на Марсе бы составил всего 38 кг. На Луне все тела становятся в 6 раз легче.

Комета Галлея сближалась с Солнцем и была видна с Земли 30 раз начиная с 240 г. до н.э. по 1986 год.

Используя, эти факты я составил и решил несколько задач.

Задача 1. Сколько бы весил весь наш класс на Луне и на Марсе?

Для решения этой задачи мы сначала с помощью измерений установили вес всех учеников нашего класса на Земле. Он составил 1224 кг.

1224:6=204 (кг) – вес класса на Луне.

$\frac{1224}{100}$ *·38=465,12 (кг) – вес класса на Марсе.*

Задача 2. Можем ли в ближайшие 50 лет наблюдать комету Галлея?

Зная, что с 240 г. до н.э. по 1986 год комета Галлея сближалась с Солнцем и была видна с Земли 30 раз, можно рассчитать период обращения кометы вокруг Солнца. (1986+240): 30=74,2 (года)

Ответ: нет

Вывод: движение звезд и планет, расположение звезд в небе - все это подчинено математическим правилам и законам. В основу астрономии положен математический аппарат.

Заключение

Нет ни одной сферы деятельности, где бы математика не использовалась.

Без нее не обходится ни одно новое открытие, не работает ни одно изобретение, не функционирует ни одно предприятие и государство, следовательно, диапазон всего того, где нужна математика, достаточно широк.

Пользуясь данными, изложенными в моей работе, я составил несколько заданий для мини проектов (Приложение 1). Эти задания можно использовать на занятиях спецкурсов в 5,6,7 классах.

Таким образом, моя гипотеза о том, что если научиться решать задачи с математическим содержанием в быту и повседневной жизни, то это поможет не сделать ошибок на экзаменах, разбираться в товарно-денежных отношениях, быть практичнее, подтвердилась.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. math-ege.sdamgia.ru
2. oge.sdamgia.ru

ПРИЛОЖЕНИЕ

Приложение 1

Задачи для мини-проектов

1.Вес предмета на Земле в 100 кг, на Марсе бы составил всего 38 кг. На Луне все тела становятся в 6 раз легче.

Выясните вес вашей семьи, вашего класса на Луне и на Марсе.

2.Сними показания счетчиков по электроэнергии и по воде в конце текущего месяца и в конце следующего месяца. Узнай тарифы на электроэнергию и по воду.

Вычисли, сколько из семейного бюджета нужно выделить на оплату этих услуг. Определи, какой процент от семейного бюджета составляет оплата этих услуг ЖКЖ.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ГОЛОВОЛОМКА «БРАВЫЙ СОЛДАТ»

Трыков Егор Геннадьевич
МБУДО г. Иркутска ЦДТТ, МБОУ г. Иркутска Лицей №1,
11 класс
г. Иркутска
Руководители: Рейнгольд Григорий Борисович, пед. доп. обр. МБУДО ЦДТТ;
Трыков Герман Геннадьевич, пед. доп. обр. МБУДО г. Иркутска ЦДТТ

Введение

Раздел «Логические игры и математические головоломки» занимает в математике особое место. С одной стороны, его значение не может сравниться со значением «серьёзных» разделов. С другой стороны, многие известные учёные-математики и популяризаторы этой науки придавали головоломкам большое значение.

Кроме того, многие педагоги используют математические игры и головоломки при подготовке своих подопечных к олимпиадам, поскольку при этом развиваются многие полезные качества.

В научно-исследовательской и проектной работе школьников данный раздел математики также широко представлен, поскольку здесь можно проявить качества, необходимые исследователю.

Данная работа посвящена авторской математической головоломке «Бравый солдат». Сама головоломка оригинальная, то есть созданная автором. Её суть такова:

По декартовой прямоугольной системе координат ходит «бравый солдат». Его движение напоминает парадный строевой шаг. Все шаги имеют единичный размер. Таким образом, он может находиться только в точках с целочисленными координатами. В начальном положении он находится в точке координатами (0, 0) и направлен по оси ординат в положительном направлении. Движение начинается с левой ноги. Повороты можно делать лишь следующим образом: после шага левой ногой можно поворачивать направо, а после шага правой ногой – налево. В начале игры задаются координаты (x_1, y_1), куда необходимо прийти. После того, как первая цель достигнута, задается вторая цель (x_2, y_2), и так несколько раз. Данная игра могла бы способствовать выработке глазомера, способностей к устному счёту и быстрому принятию решений, что актуально для детей и подростков.

Цель работы провести исследование вышеупомянутой математической головоломки, найти и описать универсальный алгоритм её решения.

Задачи:

1. Ознакомиться с аналогичными работами.
2. Строго описать правила головоломки.
3. Создать компьютерную программу «Демонстрационная доска» для решения головоломки для облегчения последующей работы.
4. Путём проведения нескольких экспериментов с помощью полученной программы выдвинуть рабочие гипотезы относительно искомых алгоритмов решения, проверить их на практике и сформулировать.
5. На основе найденного алгоритма создать программу для автоматической игры.

Основная часть

Поиск похожих работ результатов не дал, поэтому пришлось всё делать «с нуля». Сперва были описаны правила игры.

Правила игры

Игровым полем является прямоугольная декартова система координат. Значения максимальных и минимальных координат задаются. Единственный персонаж игры, «Бравый солдат», в начале игры находится в начале системы координат и смотрит в направлении увеличения ординаты. Он может, либо сделать шаг (размер шага равен 1) вперёд, либо поворот. После ходов с нечётным номером он может повернуть направо, с чётных – налево. *Первым ходом может быть только шаг. Поворачивать на одном месте можно только один раз.* То есть, можно сказать, что он передвигается строевым шагом, откуда и название игры. Цель состоит в том, чтобы за наименьшее количество шагов достигнуть места с заданными координатами. При равном количестве шагов лучшим результатом считается тот, в котором меньшее количество поворотов.

Алгоритм игры

В процессе работы были выведены следующие алгоритмы (F – движение на одну клетку вперед, L – поворот налево, R – поворот направо):

1. При условии, что точка находится по прямой линии вверх от игрока ($x = 0, y > 0$) нужно просто пройти вперед.

2. Если она находится по прямой линии, но снизу от игрока ($x = 0, y < 0$), нужно выполнить поворот назад (FRFRFFRF). Если $y = -1$, то еще раз F. Если меньше, то LFRFL и F до точки.

3. Если она находится в правой верхней четверти ($x > 0, y > 0$), то алгоритм зависит от четности положения точки по y. Если нечётен, то пройти до y и повернуть направо. Если чётен, то пройти FRFL, F до точки, R и пройти до положения по y точки F.

4. Если она находится в левой верхней четверти ($x < 0, y > 0$), то алгоритм зависит от четности положения точки по y. Если равен 1, то пройти определенный круг (FFLFFLFLR, F до точки). Если $y = 1$ и $x = 1$, то определенный алгоритм (FFFFLFFLFFLFRF)

5. Если она находится в правой нижней четверти, то в любом случае придется сделать путь FRFF. Если x четен, то F до его x позиции, после этого R и F до точки. Если нечетно, то RFL, F до точки по x, а после R и F до точки. Отдельный случай – $x = 1$ (путь там – FFFRFFRFFRFL и F до точки)

6. Если точка справа от игрока, то при $x = 1$ путь – FFFRFFRFFRFLF. При других x – пройти FRFFRF, если $x > 2$, то далее L и F до точки.

7. Если $x = -1$, то нужно пройти путь FFFFLFFLFFLFRF. Иначе – FFLFFLFF. Если $x = -3$, то FFLFFLFRFLF. Если больше, то после этого L и F до конца.

8. Если левая нижняя четверть, то при $x = -1$, то FFRFFRFFRFL, а потом F до точки. Если x четное, то FFL, F до точки, L и F до точки. Если нечетное – FFL, F до положения до точки по $x – 1$, LFRFL, F до точки.

Для проведения экспериментов была сделана компьютерная программа, реализующая вышеописанные алгоритмы. Кроме того, можно играть вручную. В этом случае полученные результаты сравниваются с оптимальными, то есть полученными по алгоритму.

Следует отметить, что при реализации автоматической игры возникла такая проблема. Базовые алгоритмы выведены для случая, когда начальное положение соответствует началу системы координат, и направление по оси ординат. При появлении второй и последующих целей, начальное положение и направления иные. Были реализованы преобразования системы координат, перенос начала и смена направления. Таким образом, удалось использовать базовые алгоритмы.

Программа разделяется на четыре спрайта: Фон (поле), Точка, которую нужно достигнуть (красная), Синяя Стрелка (игрок), Красная стрелка (Авто-игрок).

Красная точка перемещается на случайную точку на поле. Точкой на поле называется, в данном случае, пересечение линий.

В программе синей стрелки прописано управление (повороты на определенных шагах работают за счет нахождения остатка от деления на два, и если он равен 0 – поворот направо (соот. 1 – налево)).

В программе красной все самые эффективные алгоритмы достижения цели пошагово (то есть, в определенной группе координат цели определенные шаги).

Результаты работы (описанные алгоритмы) находятся в нижеприведённых таблицах. Первое число в ячейке означает количество шагов, второе – количество поворотов.

y^x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
-5	12,4	11,3	10,4	9,3	8,4	7,3	6,1	7,2	8,1	9,2	10,1
-4	11,2	10,2	9,2	8,2	7,2	6,2	5,1	6,2	7,1	8,2	9,1
-3	10,4	9,3	8,4	7,3	6,4	5,3	4,1	5,2	6,1	7,2	8,1
-2	9,2	8,2	7,2	6,2	5,2	4,2	3,1	4,3	5,1	6,3	7,1
-1	10,4	9,4	8,4	7,4	6,3	9,4	2,1	3,2	4,1	5,2	6,1
0	11,3	12,3	9,3	10,3	7,3	0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
1	12,4	11,3	10,4	9,3	8,4	7,3	3,1	3,1	4,2	5,1	6,2
2	11,2	10,2	9,2	8,2	7,2	6,2	5,2	4,1	5,3	6,1	7,3
3	12,3	11,4	10,3	9,4	8,3	7,4	6,3	5,1	6,2	7,1	8,2
4	13,2	12,2	11,2	10,2	9,2	8,2	7,2	6,1	7,3	8,1	9,3
5	14,3	13,4	12,3	11,4	10,3	9,4	8,3	7,1	8,2	9,1	10,2

Красный – кол-во поворотов одинаковое, кол-во шагов последовательное (1,2,3,4…) (по горизонтали).

y^x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
-5	12,4	11,3	10,4	9,3	8,4	7,3	6,1	7,2	8,1	9,2	10,1
-4	11,2	10,2	9,2	8,2	7,2	6,2	5,1	6,2	7,1	8,2	9,1
-3	10,4	9,3	8,4	7,3	6,4	5,3	4,1	5,2	6,1	7,2	8,1
-2	9,2	8,2	7,2	6,2	5,2	4,2	3,1	4,3	5,1	6,3	7,1
-1	10,4	9,4	8,4	7,4	6,3	9,4	2,1	3,2	4,1	5,2	6,1
0	11,3	12,3	9,3	10,3	7,3	0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
1	12,4	11,3	10,4	9,3	8,4	7,3	3,1	3,1	4,2	5,1	6,2
2	11,2	10,2	9,2	8,2	7,2	6,2	5,1	4,1	5,3	6,1	7,3
3	12,3	11,4	10,3	9,4	8,3	7,4	6,3	5,1	6,2	7,1	8,2
4	13,2	12,2	11,2	10,2	9,2	8,2	7,1	6,1	7,3	8,1	9,3
5	14,3	13,4	12,3	11,4	10,3	9,4	8,3	7,1	8,2	9,1	10,2

Зелёный – кол-во поворотов поочерёдное, кол-во шагов последовательное (1,2,3,4…) (по горизонтали).

y^x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
-5	12,4	11,3	10,4	9,3	8,4	7,3	6,1	7,2	8,1	9,2	10,1
-4	11,2	10,2	9,2	8,2	7,2	6,2	5,1	6,3	7,1	8,2	9,1
-3	10,4	9,3	8,4	7,3	6,4	5,3	4,1	5,2	6,1	7,2	8,1
-2	9,2	8,2	7,2	6,2	5,2	4,2	3,1	4,3	5,1	6,3	7,1
-1	10,4	9,4	8,4	7,4	6,3	9,4	2,1	3,2	4,1	5,2	6,1

0	11,3	12,3	9,3	10,3	7,3	0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
1	12,4	11,3	10,4	9,3	8,4	7,3	3,1	3,1	4,2	5,1	6,2
2	11,2	10,2	9,2	8,2	7,2	6,2	5,1	4,1	5,3	6,1	7,3
3	12,3	11,4	10,3	9,4	8,3	7,4	6,3	5,1	6,2	7,1	8,2
4	13,2	12,2	11,2	10,2	9,2	8,2	7,1	6,1	7,3	8,1	9,3
5	14,3	13,4	12,3	11,4	10,3	9,4	8,3	7,1	8,2	9,1	10,2

Жёлтый – кол-во шагов последовательное (1,2,3,4…), кол-во поворотов одинаковое (по вертикали)

y^x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
-5	12,4	11,3	10,4	9,3	8,4	7,3	6,1	7,2	8,1	9,2	10,1
-4	11,2	10,2	9,2	8,2	7,2	6,2	5,1	6,2	7,1	8,2	9,1
-3	10,4	9,3	8,4	7,3	6,4	5,3	4,1	5,2	6,1	7,2	8,1
-2	9,2	8,2	7,2	6,2	5,2	4,2	3,1	4,3	5,1	6,3	7,1
-1	10,4	9,4	8,4	7,4	6,3	9,4	2,1	3,2	4,1	5,2	6,1
0	11,3	12,3	9,3	10,3	7,3	0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
1	12,4	11,3	10,4	9,3	8,4	11,3	10,4	3,1	4,2	5,1	6,2
2	11,2	10,2	9,2	8,2	7,2	6,2	5,1	4,1	7,2	6,1	7,3
3	12,3	11,4	10,3	9,4	8,3	11,4	6,3	5,1	6,2	7,1	8,2
4	13,2	12,2	11,2	10,2	9,2	8,2	7,1	6,1	7,3	8,1	9,3
5	14,3	13,4	12,3	11,4	10,3	11,3	8,3	7,1	8,2	9,1	10,2

Синий – кол-во шагов последовательное (1,2,3,4…), кол-во поворотов поочередное (по вертикали)

Заключение

Задачи, поставленные при начале работы решены. Создана компьютерная программа на языке Python, реализующая, как ручную, так и автоматическую игру. В дальнейшем предполагается её доработка и популяризация.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Математическая головоломка, https://ru.wikipedia.org/wiki/Математическая_головоломка
2. Мартин Гарднер «Новые математические развлечения», АСТ «Ариэль», М, 2009
3. Документация библиотеки PyGame, https://pygame.readthedocs.io/en/latest/
4. Раздел «Графов Теория», Большая Советская Энциклопедия (1987).