НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Департамент общего образования Томской области
ОГБУ «Региональный центр развития образования»
АНО ДО «Детский технопарк «Кванториум»
Департамент образования администрации г. Томска
МБОУ лицей при ТПУ г. Томска

СБОРНИК ТРУДОВ

XXIII Всероссийской конференции-конкурса исследовательских работ старшеклассников «Юные исследователи – науке и технике»

25 – 26 марта 2022 г.

Издательство
Томского политехнического университета
Томск 2022

УДК 373.5.385(063)
ББК 74.200.585.2л0
Ю-571
Юные исследователи – науке и технике: сборник трудов XXIII Всероссийской конференции-конкурса Исследовательских работ старшеклассников «Юные исследователи – науке и технике»; Томский политехнический университет. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2022

В сборнике трудов представлены материалы работ школьников.

Сборник представляет интерес для школьников, занимающихся исследовательской и проектной деятельностью.

В сборник включены статьи, представленные в Оргкомитет конференции и заслушанные на конференции.

КОМПЬЮТЕРНЫЙ ПОДХОД К ИССЛЕДОВАНИЮ ДУГОВЫХ ЗВЁЗД

Юркшус Егор

МБУДО г. Иркутска ЦДТТ, МБОУ г. Иркутска Лицей №3, 6 класс

Руководители: Рейнгольд Григорий Борисович, п.д.о. МБУДО г. Иркутска ЦДТТ; Агейчик Виталий Новомирович, учитель математики МАОУ Лицей ИГУ г. Иркутска

Предыдущая работа была посвящена фигурам Рёло [1]. Была сделана компьютерная программа по построению этих фигур, и вообще, фигур постоянной ширины.

После этого была сделана попытка с помощью программы нарисовать различные фигуры, которые, как и фигуры постоянной ширины, состоят из нескольких равных дуг одного радиуса.

В дальнейшем эти фигуры получили общее название «дуговые звёзды», поскольку они оказались похожими на «математические звёзды» (фигуры, состоящие из нескольких равных отрезков).

Гипотеза исследования - существуют неизученные **дуговые фигуры,** которые нужно **исследовать** и найти интересные **закономерности**.

Цель: изучить дуговые звёзды, выделить у них существенные параметры и установить закономерности.

Задачи:

1. Провести библиографический поиск аналогичных фигур.
2. Сделать программу по построению дуговых звёзд.
3. Провести классификацию фигур.
4. При помощи программы создать сводную таблицу.
5. Попытаться выявить интересные закономерности.

Библиографический обзор

Первым делом была прочитана работа, посвящённая фигурам Рёлло [1]. Очень полезны оказались работы учеников объединения «Юный программист»:

- Виктор Свердюков «Исследование траектории точки, движущейся по окружности, центр которой также движется по окружности» [2],
- Никита Сизых «Математические звёзды» [3]

Из них были почерпнуты знания о многих интересных геометрических объектах и методам их исследования с помощью компьютерных программ.

Были приложены усилия для поиска фигур, аналогичных тем, которые рассматриваются в нашей работе, но их найти не удалось.

Таким образом, работа имеет элемент оригинальности.

В процессе работы все искомые фигуры были поделены на 2 класса, у них были выделены 2 параметра (порядок и способ построения).

С помощью программы, которая не раз усовершенствовалась в процессе работы, были построены фигуры для большого количества параметров и сведены в таблицу.

После ознакомления с математическими звёздами, было замечено сходство наших фигур с ними. Главное сходство в том, что и те, и другие получаются из «родительского» правильного многоугольника, количество вершин которого называется **порядком** фигуры. Разница состоит в том, что классические математические звёзды состоят из равных отрезков, а дуговые – из равных дуг. Были получены 2 класса фигур:**сторонние** (дуги рисуются из середин сторон n-угольника) и **вершинные** (дуги рисуются из вершин n-угольника). Параметр, определяющий, какие вершины используются при построении, называется «способом». В программе задаются все параметры (класс, порядок, и способ) для рисования фигуры.См. рисунок

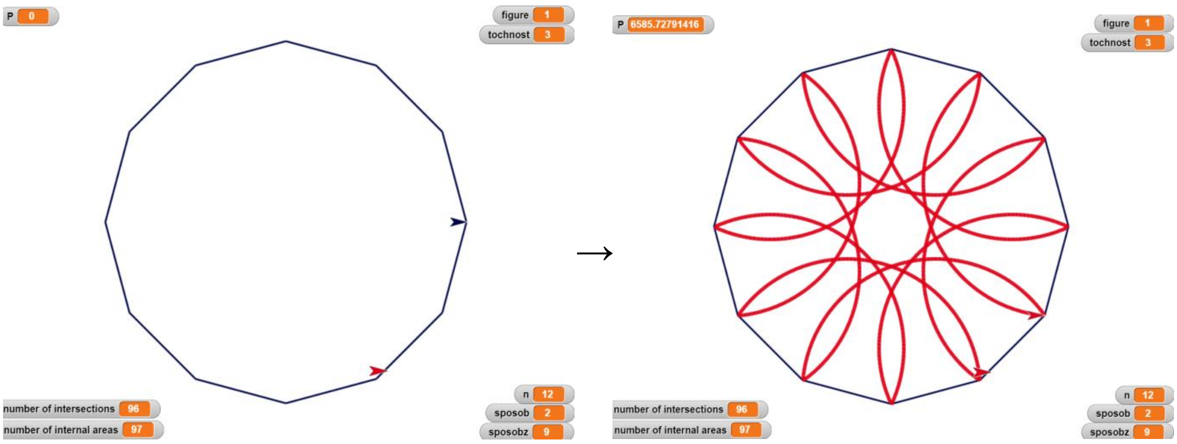


Рис. 1.

Рассчитывается способ звёзд (способ если был бы у звёзд), периметр дуг, кол-во пересечений, и кол-во внутренних площадей.

В результате проведённой работы, в целом, удалось достичь цели. Была создана программа для построения дуговых звёзд.

Были выявлены следующие закономерности:

Если способ n/4 (округлить), то кол-во пересечений и внутренних площадей будет наибольшим.

1. Если n=6k (k произвольное натуральное число), а способ равен k, то точка пересечения всех дуг будет являться центром многоугольника (ПРИМЕЧАНИЕ: работает только с вершинными звёздыми)
2. Во всех звёздых первого порядка (кроме n=5) нельзя вырезать звезду из центра (ПРИМЕЧАНИЕ: работает только с угловыми звёздами).
3. Во всех угловых звёздах 1 порядка и n>6 это будет схоже с гипоциклоидой [4]. (ПРИМЕЧАНИЕ: работает только с угловыми звёздыми)
4. Если n будет увеличиваться, а способ будет оставаться прежним, то радиус будет уменьшаться. Также если n будет уменьшаться, а способ будет оставаться прежним то радиус будет увеличиваться.
5. Если n не будет изменяться, а способ будет увеличиваться, то радиус будет увеличиваться. Также если n не будет изменяться, а способ будет уменьшаться, то радиус будет уменьшаться.
6. Если взять нечётное натуральное число c> 1, а n =(((c-1)/2)+k)*c (k произвольное натуральное число), а способ равен (n-(n/c+3))/2 то дуги образуют c-угольник Рёло (ПРИМЕЧАНИЕ: работает только с вершинными звёздыми) [5] доказательство.

Тем не менее, работа имеет перспективы для продолжения с целью дальнейшего поиска закономерностей.

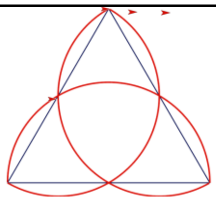
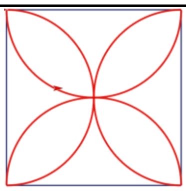
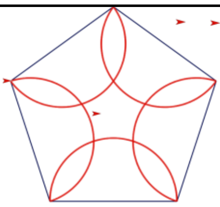
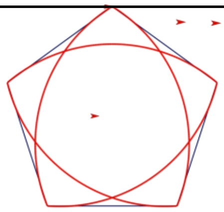
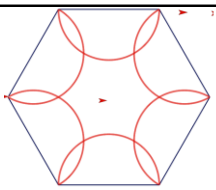
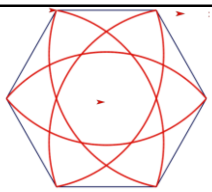
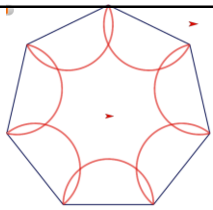
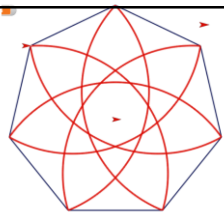
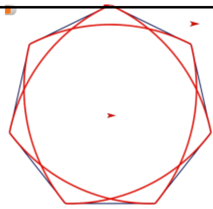
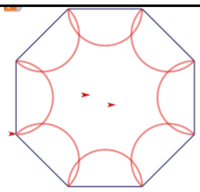
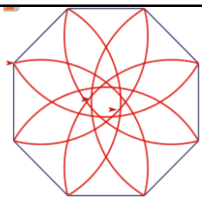
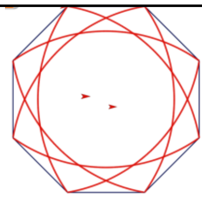
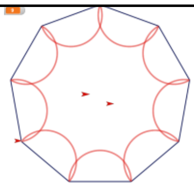
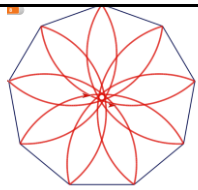
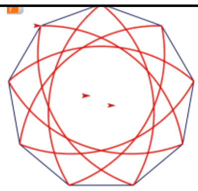
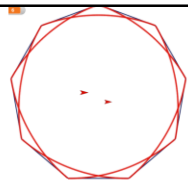
[5] Если взять какой-либо n-угольник кратный c, то кол-во вершин можно разделить на c. Тогда пропуск будет равен n/c. Значит будет образовываться n-угольник из дуг. Он будет Рёло, т.к. центры дуг (которые находятся вместо стороны) будут на вершине этого n-угольника.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

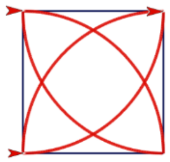
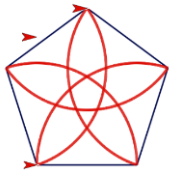
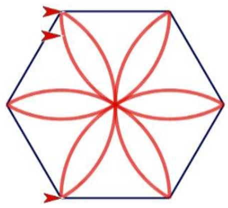
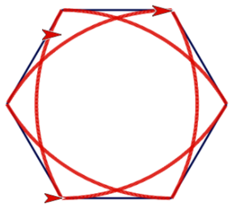
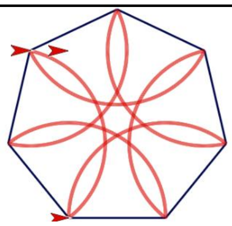
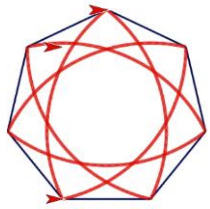
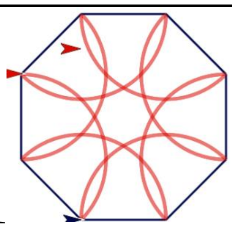
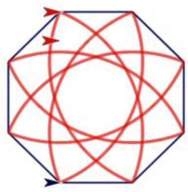
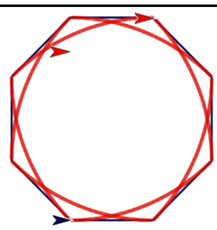
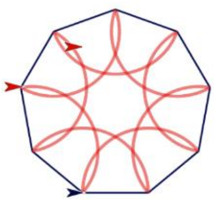
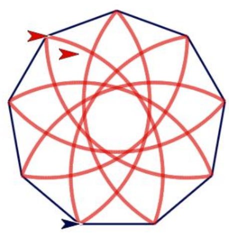
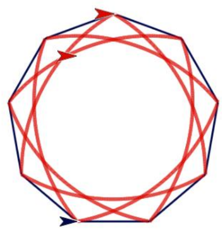
1. «Многоугольник Рёлло», https://ru.wikipedia.org/wiki/Многоугольник_Рёло
2. Виктор Свердюков «Исследование траектории точки, движущейся по окружности, центр которой также движется по окружности», материалы конференции «Шаг в будущее, Сибирь» 2020г.
3. Никита Сизых «Математические звёзды», мат. конференции «Эврика», Иркутск 2020.
4. «Гипоциклоида», https://en.wikipedia.org/wiki/Hypocycloid.

Приложение 1. Скриншоты фигур.

Сторонние звёзды.

N способ	1	2	3	4
3	 1			
4	 1			
5	 1			
6	 1			
7	 1			
8	 1			
9	 1	 1		

Вершинные звёзды

Способ порядок	1	2	3
4	 1		
5			
6	1 		
7	 1		
8	 1		
9	 1		

НЕСТАНДАРТНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ, НЕРАВЕНСТВ И ИХ СИСТЕМ: ПРИМЕНЕНИЕ МОНОТОННОСТИ ФУНКЦИЙ

Толкачева Мария

Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение лицей при ТПУ, 10 класс

г. Томск

Руководитель: Киреенко Светлана Григорьевна, учитель математики

В школьном курсе математики изучаются стандартные приемы, которые позволяют решать уравнения, неравенства и их системы. Но не всякое уравнение или неравенство в результате преобразований может быть сведено к уравнению или неравенству, для которого существует определенный метод решения. Поэтому полезно использовать нестандартные приемы, которые сокращают и упрощают решение. Одним из таких методов является «функциональный подход», основанный на применении свойств элементарных функций, таких как монотонность, ограниченность, четность (нечетность), непрерывность и др. Данный материал изучается в школьном курсе математики, но строгое разделение материала по основным линиям не позволяет выбрать более рациональный способ решения определенного уравнения, неравенства или системы. Более того, некоторые задачи невозможно решить, не применяя свойств функций, поэтому данная тема является важной и необходимой. В данной работе будет подробно изучено применение монотонности функций, что полезно при решении задач с параметром (в том числе из ЕГЭ), задач математических олимпиад, соревнований и конкурсов.

Актуальность: литературы, в которой бы данный материал был систематизирован и сопровожден достаточным количеством примеров, практически нет, а в большинстве школьных учебников нет даже и упоминания о применении функциональных методов решения задач.

Цель: популяризация применения нетрадиционных методов решения уравнений, неравенств и их систем.

Задачи:

1. Изучить теоретический материал по теме «Монотонность функций и ее применение».
2. Научиться распознавать и решать задачи, в которых является целесообразным использование возрастания и убывания функций.
3. Подобрать задачи из литературы, интернета и классифицировать их по способам решения.

4. Самостоятельно составить несколько подобных задач.
5. Создать руководство по решению задач на применение монотонности функций.

Теоретические сведения

Опр. 1. Функция $f(x)$ называется *возрастающей* на промежутке X, если для любых x_1 и x_2 из этого промежутка, таких что $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $f(x_2) > f(x_1)$.

Опр. 2. Функция $f(x)$ называется *убывающей* на промежутке X, если для любых x_1 и x_2 из этого промежутка, таких что $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $f(x_2) < f(x_1)$.

Опр. 3. Функция $f(x)$ называется *монотонной* на промежутке X, если она либо возрастает, либо убывает на этом промежутке.

Свойства монотонных функций:

1. Сумма возрастающих (убывающих) на X функций является возрастающей (убывающей) функцией на X.
2. Произведение двух возрастающих (убывающих) на X неотрицательных функций является возрастающей (убывающей) функцией на X.
3. Если положительная (отрицательная) функция $f(x)$ возрастает (убывает) на X, то функция $\frac{1}{f(x)}$ убывает (возрастает) на X.
4. Если при допустимых значениях переменных функция $y = f(t)$ возрастает и функция $t = g(x)$ возрастает, то сложная функция $y = f(g(x))$ также будет возрастать.
5. Если при допустимых значениях переменных функция $y = f(t)$ убывает и функция $t = g(x)$ убывает, то сложная функция $y = f(g(x))$ возрастает.
6. Если при допустимых значениях переменных функция $y = f(t)$ возрастает, а функция $t = g(x)$ убывает, то сложная функция $y = f(g(x))$ убывает.
7. Если при допустимых значениях переменных функция $y = f(t)$ убывает, а функция $t = g(x)$ возрастает, то сложная функция $y = f(g(x))$ убывает.

Теорема о корне. Пусть функция $f(x)$ монотонна на промежутке X, число b — любое из значений, принимаемых $f(x)$ на промежутке X, тогда уравнение $f(x) = b$ имеет единственный корень на промежутке X.

Следствие 1. Пусть функция $f(x)$ монотонна на промежутке X, тогда уравнение $f(x) = b$ имеет не более одного корня на промежутке X.

Следствие 2. Если функция $f(x)$ возрастает на промежутке X, а функция $g(x)$ убывает на этом же промежутке, то уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более одного корня на этом промежутке.

Следствие 3. Если функция $f(x)$ монотонна на промежутке X, то уравнение $f(x_1) = f(x_2)$, где $x_1, x_2 \in X$, может иметь решение только при $x_1 = x_2$.

Утверждение 1. Если функция $f(x)$ возрастает на всей числовой прямой, а функция $g(x)$ убывает на всей числовой прямой и $f(x_0) = g(x_0)$, то справедливы следующие высказывания:

а) $f(x) \leq g(x)$ в том и только в том случае, когда $x \in (-\infty;\ x_0]$;

б) $f(x) \geq g(x)$ в том и только в том случае, когда $x \in [x_0;\ +\infty)$.

Наглядный смысл этого утверждения очевиден (рис. 1).

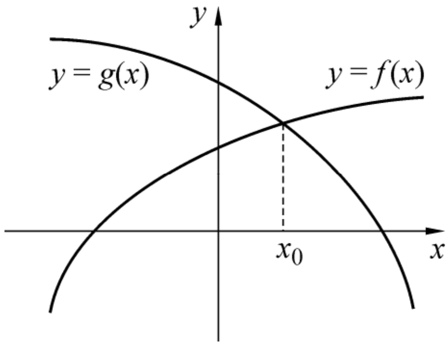


Рис. 3.1

Утверждение 2. Если функция $f(x)$ возрастает, то уравнение $f\big(f(x)\big) = x$ равносильно уравнению $f(x) = x$.

Следствие. Если n — натуральное число, а функция $f(x)$ монотонно возрастает, то уравнение $\underbrace{f(f(\ldots f(x))\ldots)}_{n\text{ раз}} = x$ равносильно уравнению $f(x) = x$.

Сформулированные утверждения позволяют обосновывать единственность решения уравнения в тех случаях, когда свести его к простейшему не удается, но довольно просто можно подобрать корень. Обоснование того, что других корней нет, удается сделать, опираясь на свойства монотонных функций.

Пример 1. Решить уравнение $\frac{x+2}{\sqrt{x+3}-1} + \frac{x+4}{\sqrt{x+8}-2} = 9 - \frac{x+6}{\sqrt{x+15}+3}$

Перенесем дробь из правой части в левую, умножим и разделим каждую дробь на выражение, сопряженное ее знаменателю: на $\sqrt{x+3}+1, \sqrt{x+8}+$

$+2, \sqrt{x+15} - 3$ соответственно, затем преобразуем знаменатель каждой дроби по разности квадратов и сократим. Получим уравнение

$$\sqrt{x+3} + 1 + \sqrt{x+8} + 2 + \sqrt{x+15} - 3 = 9,$$

Откуда $\sqrt{x+3} + \sqrt{x+8} + \sqrt{x+15} = 9$. Обозначим левую часть уравнения за *f(x)*. Функция *f(x)* монотонно возрастает на промежутке [-3; + ∞), как сумма возрастающих функций. Следовательно, данное уравнение имеет не более одного корня.

$x = 1$ – единственный корень, так как 2 + 3 + 4 = 9 (верно).

Ответ: $x = 1$.

Пример 2. Найти все значения *a*, для каждого из которых существует хотя бы одна пара чисел x и y, удовлетворяющих неравенству $11|x - 1| + +5|x+1| \leq \sqrt{9-y^2} + 7$.

Рассмотрим функции $f(x) = 11|x-1| + 5|x+1|$ и $g(y) = \sqrt{9-y^2} + 7$. Распишем все возможные варианты раскрытия модулей:

При $x \geq 1$:

$11x - 11 + 5x + 5a = 16x - 11 + 5a,$

$11x - 11 - 5x - 5a = 6x - 11 - 5a.$

Коэффициенты перед x положительные, т.е. функция $f(x)$ возрастает.

При $x < 1$:

$-11x + 11 + 5x + 5a = -6x + 11 + 5a,$

$-11x + 11 - 5x - 5a = -16x + 11 - 5a.$

Коэффициенты перед x отрицательные, т.е. функция $f(x)$ убывает. То есть при $x = 1$ функция принимает наименьшее значение.

Рассмотрим функцию $g(y)$, при $y = 0$ функция принимает наибольшее значение.

Изначальное неравенство имеет вид $f(x) < g(y)$. Если $f(1) > g(0)$, то $f(x) \geq f(1) > g(0) \geq g(y)$, то есть $f(x) > g(y)$, поэтому мы рассматриваем случай, когда $f(1) \leq g(0)$.

$$5|1+a| \leq 10,$$

$$-10 \leq 5 + 5a \leq 10,$$

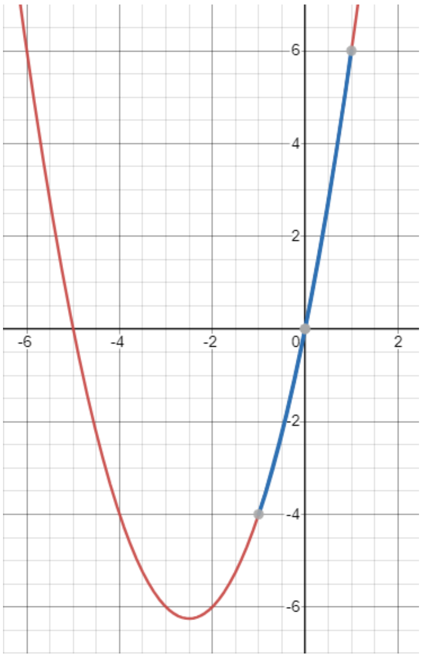
$$-3 \leq a \leq 1.$$

Ответ: $a \in [-3; 1]$.

Пример 3. Найти все значения a, при которых уравнение $\cos^6 x + (5\cos x - a)^3 + 1 + 5\cos x = \sin^2 x + a$ имеет хотя бы одно решение.

Перепишем уравнение в виде $\cos^6 x + \cos^2 x = (a - 5\cos x)^3 + a - 5\cos x$. Заметим, что в левой и правой частях уравнения функция $f(t)$ имеет вид $f(t) = t^3 + t$. Функция $f(t)$ монотонно возрастает, как сумма двух возрастающих функций. Тогда равенство $f(x) = f(y)$ выполняется при $x = y$. В нашем случае $\cos^2 x = a - 5\cos x$, тогда $a = \cos^2 x + 5\cos x$, $\cos x$ обозначим за p, $-1 \le p \le 1$. Рассмотрим функцию $y = p^2 + 5p$.

Координаты вершины находятся следующим образом: $p_0 = -\frac{5}{2} = -2{,}5$ и $y_0 = (-2{,}5)^2 + 5 * (-2{,}5) = -6{,}25$.



Учитывая, что $-1 \le p \le 1$, $a \in [-4; 6]$, так как $y(-1) = -4$ и $y(1) = 6$.

Ответ: $a \in [-4; 6]$.

В работе были рассмотрены свойства монотонных функций и их применение при решении разнообразных задач, составленных самостоятельно с опорой на учебную литературу. Функциональный метод актуален и интересен за счет простого подхода к обоснованию правильного решения, пояснить которое, используя «стандартные» приемы, бывает затруднительно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азаров А.И., Гладун О.М., Кремень Ю.А., Федосенко В.С. Алгебраические уравнения и неравенства: Учебное пособие. – Минск: ООО «Тривиум», 1997. – 128 с.
2. Шестаков С.А. ЕГЭ 2020. Математика. Задачи с параметром. Задача 18 (профильный уровень) / Под ред. И.В. Ященко. – М.: МЦНМО, 2020. – 288 с.
3. Решу ЕГЭ [Электронный ресурс] // URL: http://ege.sdamgia.ru

УДИВИТЕЛЬНАЯ ТРАПЕЦИЯ

Сухорослов Геннадий

Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение

лицей при ТПУ, 10 класс

г. Томск

Руководитель: Алешина Ольга Борисовна, учитель математики

В своей работе я остановился на изучении такого четырёхугольника как трапеция.

Выбор данной темы обусловлен желанием подробно изучить наиболее «неправильный» четырёхугольник из изучаемых в школьном курсе планиметрии - трапецию. Трапеция обладает не менее замечательными свойствами, чем параллелограммы, прямоугольники, ромбы и др.

Цель работы: расширить и систематизировать знания о трапеции; составить справочник с доказательством некоторых свойств; составить задачник, отражающий использование разных свойств трапеции.

Благодаря справочнику, представленному в этой работе, Вы сможете познакомиться с удивительными и очень полезными фактами, связанными с трапецией. В работе представлены решения основных типов задач, которые могут встретиться на олимпиадах и экзаменах. При решении задач используются разные методы и приёмы решения, в том числе дополнительные построения, использование векторов и др.

Задачи, которые я ставил в процессе выполнения работы:

1) Вспомнить свойства трапеции, которые изучались в школе;

2) Исследовать новые факты о трапеции, которые выходят за рамки школьной программы;

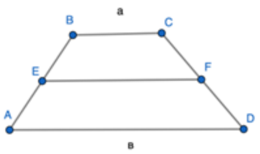
3) Рассмотреть методы решений задач о трапеции, в том числе метод дополнительных построений;

5) Разработать справочник и практикум.

В рамках данной печатной работы нельзя отразить весь разработанный материал, поэтому представлю интересные моменты.

В моем справочнике представлено 30 различных свойств трапеции, и из них отмечу наиболее интересные, которые я доказал разными способами:

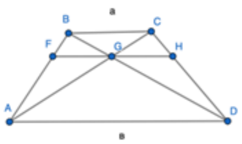
1) Если трапеция разделена прямой, параллельной её основаниям, на 2 равновеликие трапеции, то отрезок этой прямой, заключённый между боковыми сторонами, равен $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$



$$\boxed{EF = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}}$$

Доказательство данного свойства можно изучить в справочнике.

2) Отрезок, параллельный основаниям и проходящий через точку пересечения диагоналей



$$\boxed{FH = \frac{2ab}{a+b}}$$

Доказательство:

Из подобия треугольников AGD и BGC следует, что $\frac{AG}{GC} = \frac{AD}{BC} = \frac{b}{a}$

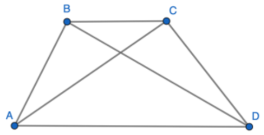
Из подобия треугольников AGF и ACB следует, что $\frac{AG}{AC} = \frac{FG}{BC} = \frac{b}{a+b}$

Отсюда FG = $\frac{b}{a+b} * BC = \frac{ab}{a+b}$

FG = GH.

Тогда $FH = \frac{2ab}{a+b}$

3) В трапеции сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов боковых сторон плюс удвоенное произведение оснований.



$$\boxed{AC^2 + BD^2 = AB^2 + CD^2 + 2AD * BC}$$

Доказательство (векторный способ):

Докажем это равенство, используя векторный способ. Выразим векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$через векторы оснований и боковых сторон:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC};\ \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} \text{ иначе} \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CD};\ \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}.$$

Умножим скалярно векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$ на себя:

1) $\overrightarrow{AC} * \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC^2} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) * \left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CD}\right) = \overrightarrow{AB} * \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} * \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} * \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BC} * \overrightarrow{CD}$.

2) $\overrightarrow{BD} * \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BD^2} = \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}\right) * \left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{AD} * \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} * \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} * \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} * \overrightarrow{CD}$.

Сложим левые и правые части полученных выражений:

$$\overrightarrow{AC^2} + \overrightarrow{BD^2} = \overrightarrow{AB} * \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} * \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} * \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BC} * \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD} * \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} * \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} * \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} * \overrightarrow{CD}.$$

Преобразуем правую часть, используя переместительный и распределительный законы для скалярного произведения:

$$\overrightarrow{AC^2} + \overrightarrow{BD^2} = \overrightarrow{AB} * \left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BC}\right) + \overrightarrow{CD} * \left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}\right) + 2 * \overrightarrow{AD} * \overrightarrow{BC};$$

$$\overrightarrow{AC^2} + \overrightarrow{BD^2} = \overrightarrow{AB} * \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}\right) + \overrightarrow{CD} * \left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}\right) + 2 * \overrightarrow{AD} * \overrightarrow{BC};$$

$\overrightarrow{AC^2} + \overrightarrow{BD^2} = \overrightarrow{AB} * \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} * \overrightarrow{CD} + 2 * \overrightarrow{AD} * \overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{AC^2} + \overrightarrow{BD^2} = \overrightarrow{AB^2} + \overrightarrow{CD^2} + 2 * \left|\overrightarrow{AD}\right| * \left|\overrightarrow{BC}\right| * \cos 0° \Rightarrow$ т. к. $\overrightarrow{AC^2} = \left|\overrightarrow{AC}\right|^2 = AC^2$ и т.д. Получим:

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + CD^2 + 2AD * BC$$

В моём практикуме представлены 27 задач различного уровня сложности (от задач с профильного ЕГЭ и задач, составленных самостоятельно, до олимпиад 1 и 2 уровня сложности), направленные на исследование различных способов решения задач и использования свойств, без которых решать задачи бывает просто не возможно. Ко всем задачам представлены ответы. К 12 наиболее сложным из них предоставлены решения.

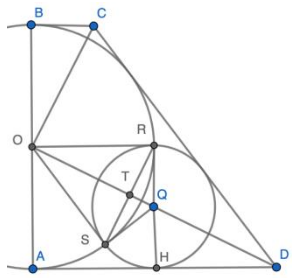
Представлю вам наиболее интересную задачу, в которой используются нестандартные методы решения.

Дана трапеция ABCD, сторона AB которой перпендикулярна основаниям AD и BC. На стороне AB как на диаметре построена окружность, касающаяся стороны CD. Длина радиуса этой окружность равна $\sqrt{6}$. Другая окружность, длина радиуса которой равна $\sqrt{2}$, касается сторон AD и CD и пересекает первую окружность так, что длина их общей хорды равна $\sqrt{6}$, а центры окружностей расположены по разные стороны от хорды. Найдите площадь трапеции ABCD.

Идея

Доказать, что центр O первой окружности лежит на пересечении биссектрис углов ADC и BCD, вычислить величину угла ADC, затем, рассматривая треугольники ADO и BCO, найти длины оснований трапеции.

Указание



Доказать, что центры обеих окружностей лежат на биссектрисе угла ADC, рассмотреть четырёхугольник, образованный центрами окружностей и точками их пересечения, найти расстояние между центрами окружностей.Для нахождения величины угла ADC рассмотреть треугольники AOD и HQD.

Решение

Обозначим буквами O и Q центры первой и второй окружностей соответственно.

Сразу заметим, что поскольку прямая AD перпендикулярна диаметру первой окружности AB, она является касательной к ней. Поэтому обе окружности касаются сторон AD и CD, то есть обе они вписаны в угол ACD и их центрыO и Q лежат на биссектрисе этого угла. Также отметим, что первая окружность касается и стороны BC (это обосновывается так же, как и её касание со стороной AD), поэтому она вписана и в угол BCD. Ясно, что для ответа на вопрос задачи нам достаточно найти величину угла ADC, потому что тогда, рассмотрев треугольники AOD и BOC, мы сможем найти и длины оснований трапеции.

Понятно, что O - середина AB, $\mathrm{AO} = \mathrm{BO} = \sqrt{6}$, $\mathrm{AB} = 2\sqrt{6}$.Обозначим буквами R и S точки пересечения первой и второй окружностей, тогда по условию задачи $OR = OS = \sqrt{6}$, $QR = QS = \sqrt{2}$,а $RS = \sqrt{6}$; а буквой T обозначим точку пересечения отрезков RS и OQ (они пересекаются в силу того, что точки O и Qлежат по разные стороны от RSпо условию задачи). Треугольники ORQ и OSQ, очевидно, равны по 3 сторонам, поэтому углы ROQи SOQ равны. Стало быть, OQ – биссектриса угла ROS. Но треугольник ORS равнобедренный, значит $OQ \perp RS$, $RT = TS = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

$OQ = OT + QT$; по теореме Пифагора:

$$OT = \sqrt{OR^2 - RT^2} = \sqrt{6 - \frac{6}{4}} = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2};$$

$$QT = \sqrt{QR^2 - RT^2} = \sqrt{2 - \frac{6}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; OQ = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}.$$

Проведём отрезок QH, перпендикулярный стороне AD $(H \in AD)$, и обозначим величину острого угла ADO буквой α. Из прямоугольных треугольников AOD и HQD получаем:

$$OD = \frac{AO}{\sin\widehat{ADO}} = \frac{\sqrt{6}}{\sin\alpha}; \quad QD = \frac{QH}{\sin\widehat{ADO}} = \frac{\sqrt{2}}{\sin\alpha};$$

$$OQ = OD - QD \implies 2\sqrt{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sin\alpha} \implies \sin\alpha = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{12} - \sqrt{4}}{4}$$
$$= \frac{\sqrt{3} - 1}{2}.$$

Так как угол ADO - острый, то

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin\alpha^2} = \sqrt{\frac{4 - \left(3 - 2\sqrt{3} + 1\right)}{4}} = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt[4]{12}}{2}.$$

Наконец, пользуясь свойствами внутренних односторонних углов и рассматривая треугольники AOD и BOC, получаем:

$$\widehat{ADC} = 2\widehat{ADO} = 2\alpha, \qquad \widehat{BCD} = \pi - \widehat{ADC} = \pi - 2\alpha,$$
$$\widehat{BCO} = 0{,}5\widehat{BCD} = \frac{\pi}{2} - \alpha;$$

$$AD = AO * ctg\widehat{ADO} = \sqrt{6}ctg\ \alpha; \quad BC = BO * ctg\widehat{BCO} = BO * ctg\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$
$$= \sqrt{6}tg\ \alpha;$$

$$\frac{AD + BC}{2} = \frac{\sqrt{6}tg\ \alpha + \sqrt{6}ctg\ \alpha}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}(tg\ \alpha + ctg\ \alpha) = \frac{\sqrt{6}}{2}\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{6} * 1}{2\sin\alpha\cos\alpha}.$$

$$S_{ABCD}=\frac{AD+BC}{2}*AB=\frac{\sqrt{6}}{2\sin\alpha\cos\alpha}*2\sqrt{6}=\frac{2*6}{2*\frac{\sqrt{3}-1}{2}*\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}}=\frac{6}{\frac{\sqrt{3}-1}{2}*\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}}$$
$$=\frac{12\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{\sqrt[4]{3}\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}=\frac{6\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{\sqrt[4]{3}}.$$

Ответ: $S_{ABCD}=\frac{6\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{\sqrt[4]{3}}$.

В ходе работы:

1) был создан справочник с формулами и фактами о трапеции, в том числе утверждениями, выходящими за рамки школьных учебников;

2) был разработан практикум с задачами, в которых используются ключевые задачи с трапециями, также рассмотрен метод дополнительных построений, без которого решение определённого типа задач невозможно;

3) в практикуме разобраны задачи, которые входят в сборники по подготовке к ЕГЭ и находятся в заключительных этапах перечневых олимпиад 1 и 2 уровня.

Можно сделать вывод о том, что сначала стоит решать задачу геометрическим способом. Если решить задачу этим методом не получается, стоит попробовать решить задачу алгебраическим способом, но он требует громоздких вычислений.

В результате выполнения данной работы у меня появилось полное понимание такого четырёхугольника как трапеция и полноценное представление способов решения задач с этим четырёхугольником.

СЕЧЕНИЯ КУБА

Сыромятников Игорь

Муниципальное бюджетное учреждение дополнительного образования «Центр образования «Перспектива», 11 класс

г. Зеленогорск Красноярского края

Руководитель: педагог дополнительного образования Михайленко Л.В.

Если трёхмерный куб пересечь некоторой плоскостью, то в пересечении получится некоторая плоская фигура – сечения куба. На рисунке

1 покажем какие сечения получаются, если куб пересекать плоскостями, перпендикулярными главной диагонали куба.

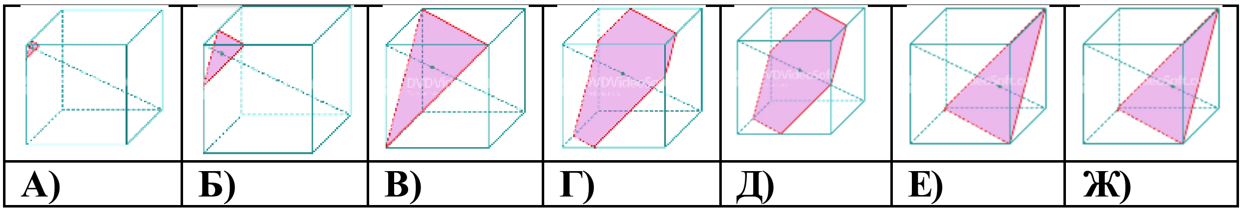


Рисунок 1.Сечения куба

Задача 1.Построить графики функций P(x) и S(x), где соотвественно периметр и площадь сечения куба плоскостью, перпендикулярной его диагонали (на расстоянии x от одной из вершин). Вопрос: *Как будут выглядеть грпфики этих функций*

Решение.

Рассмотрим сначала те сечения, которые пересекают диагональ в точках отрезка A_1P (рисунок 2),примем расстояние x от вершины A_1, сторону куба обозначим через a.

В сечении будут получаться равносторонние треугольники.

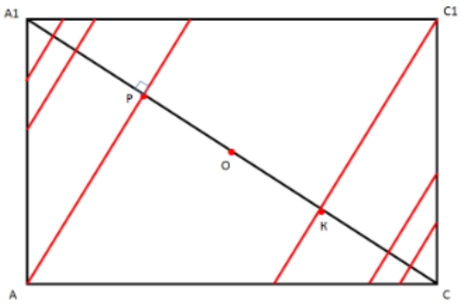


Рисунок 2. Диагональное сечение.

1.Найдем периметр и площадь треугольника, когда его вершины находятся в серединах ребер куба (рисунок 1Б). Расстояние от вершины A_1 до треугольника обозначаем через x, сторону куба a: $x = \frac{a\sqrt{6}}{12}; a = \frac{12x}{\sqrt{6}} = \frac{12x\sqrt{6}}{6} = 2x\sqrt{6};$ Найдем периметр треугольника $P(a) = 3 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$ или $P(x) = \frac{3 \cdot 2x\sqrt{6}}{2} = 3x\sqrt{6}$

Площадь треугольника $S(a) = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$ $S(x) = \frac{4x^2 \cdot 3\sqrt{3}}{8} = \frac{3x^2\sqrt{3}}{2}$

2. Выделим сечение, проходящее через три вершины куба (рисунок 1В) и найдем его периметр и площадь. Это равносторонний треугольник со

стороной $a\sqrt{2}$. Расстояние от центра куба до нашего сечения $\frac{a\sqrt{3}}{6}$.При $0 < x < \frac{a\sqrt{6}}{6}$ в сечении получаются равносторонние треугольники, потому что стороны всех треугольников параллельны.

$$P(x) = 6x\sqrt{3}$$
$$S(x) = 3x^2\sqrt{3}$$

3. Шестиугольники получаются, когда сечение проходит расстояние от точки Р до точки К (рисунок 2).

Расстояние от вершины куба изменяется $\frac{a\sqrt{3}}{3} < x < \frac{2a\sqrt{3}}{3}$. Найдём периметр и площадь шестиугольника, проходящего через центр диагонали (рисунок 1Д).

Периметр шестиугольника: $P(x) = 6 \cdot \frac{x\sqrt{6}}{3} = 2x\sqrt{6}$. Площадь шестиугольника: $S = x^2\sqrt{3}$

4.Найдем периметр и площадь сечения, изображенного на рисунке 1Е.

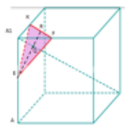
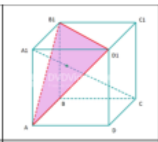
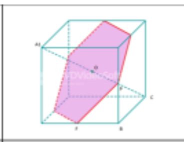
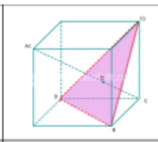
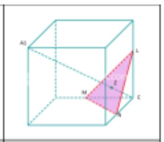
$$P(x) = \frac{3x\sqrt{6}}{2}; S(x) = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$$

5. Найдем периметр и площадь сечения, изображенного на рисунке 1Ж.

$$P(x) = \frac{3x\sqrt{6}}{5}. \ S(x) = \frac{3x^2\sqrt{3}}{50}$$

Все полученные данные соберем в таблицу:

Таблица 1. Периметры и площади сечений куба

					
	треугольник	треугольник	шестиугольник	треугольник	треугольник
P(x)	$3x\sqrt{6}$	$6x\sqrt{3}$	$2x\sqrt{6}$	$\frac{3x\sqrt{6}}{2}$	$\frac{3x\sqrt{6}}{5}$
S(x)	$\frac{3x^2\sqrt{3}}{2}$	$3x^2\sqrt{3}$	$x^2\sqrt{3}$	$\frac{x^2\sqrt{3}}{4}$	$\frac{3x^2\sqrt{3}}{50}$
X в зависимости от а	$\frac{a\sqrt{3}}{6}$	$\frac{a\sqrt{3}}{3}$	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$	$\frac{2a\sqrt{3}}{3}$	$\frac{5a\sqrt{3}}{6}$

Теперь построим графики периметра и площади.

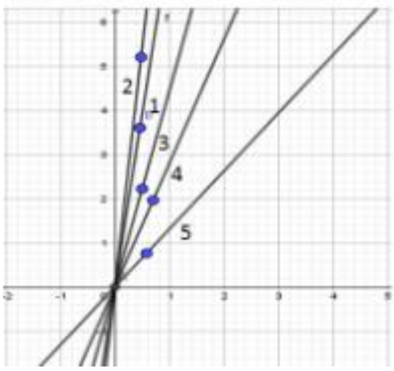


Рисунок 3.Графики периметров сечений.

Вывод: *Графиками периметров явились прямые. Построили график 1. У функции графика 2 коэффициент увеличился. У функций графиков 3,4,5 коэффициенты уменьшались и графики становились всё ближе к оси Ox.*

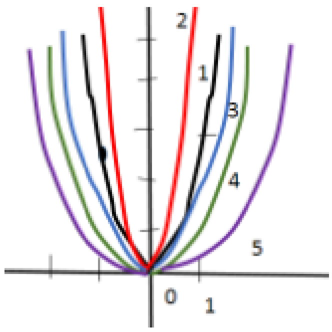


Рисунок 4. Графики площадей сечений.

Вывод: *Графиками площадей стали параболы. То же самое получилось с графиками площадей. Построили график функции 1. У функции графика 2 коэффициент увеличился. У функций графиков 3,4,5 коэффициенты уменьшались и графики становились всё ближе к оси Ox.*

Четырехмерный куб. *Задача*. Изобразить семейство сечений четырехмерного куба гиперплоскостями, перпендикулярными главной диагонали. Возьмем диагональ, соединяющую вершины (0; 0; 0; 0) и (1; 1; 1; 1). Тогда уравнение этих гиперплоскостей будет иметь вид x + y + z + t = h где h – некоторая константа. Четырехмерный куб представляет собой пересечение двух частей четырехмерного пространства. Это пространство задано системами неравенств:

$$\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ z \ge 0 \\ t \ge 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x \le 1 \\ y \le 1 \\ z \le 1 \\ t \le 1 \end{cases}$$

Гиперплоскость x + y + z + t = h пересекает каждую из этих частей по правильному тетраэдру. Проследим также за изменениями этих конфигураций при изменении h от 0 до 2. В начальный момент времени h = 0 один из тетраэдров состоит из одной точки. Затем его линейные размеры т.е ребро увеличивается пропорционально h. А второй тетраэдр постепенно уменьшается. Множество представляет собой пересечение двух таких тетраэдров и может быть точкой, тетраэдром, усеченным тетраэдром. При совпадении размеров получается в пересечении правильный октаэдр.

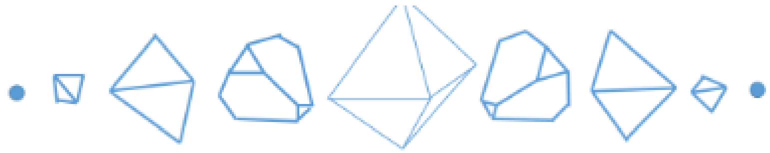


Рисунок 5. Сечения четырехмерного куба, перпендикулярные диагонали.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Журнал Математика № 11 2010 г. с. 36-40

2. Журнал Квант № 6 1986 г. с. 3-7

ВАРИАТИВНОСТЬ ГРАФИЧЕСКОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРОМ

Коновалов Платон, Шпренгер Алиса, Фаллер Юлия, Брюханцева Ульяна

Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение лицей при ТПУ, 11 класс

г. Томск

Руководитель: Беленкова Наталья Павловна

Задачи с параметром отличаются от обычных уравнений и неравенств, содержащих одну или несколько неизвестных величин, наличием буквенных параметров, при различных числовых значениях которых меняется не только количество решений, но и вид задачи. Они требуют особого внимания, уверенного знания школьной программы по математике, способности вести исследовательскую деятельность, выдвигать гипотезы и делать выводы. Поэтому эти задачи часто относят к сложным, и встречаются они не только на ЕГЭ по математике, но и в олимпиадах различного уровня и вступительных экзаменах.

Методов решения задач с параметром очень много: логический перебор, применение свойств функций, исследование дискриминанта и другие. В нашей работе мы решили рассмотреть графический метод решения, который отличается своей наглядностью и вариативностью, из-за чего вызывает интерес с исследовательской точки зрения. Сначала мы рассмотрели наиболее часто встречающиеся графические образы различных уравнений и неравенств (прямые, отрезок, параболы, окружности, параллелограммы и др.) Понимая, что главным недостатком графического решения является строгость этого метода и что результат, увиденный на рисунке, не всегда является достоверным, мы старались обращать на это особое внимание и, по возможности, аходить аналитически требуемые значения.

Многие школьники боятся решать сложные задачи, в том числе задачу с параметром, так как переживают, что не смогут решить ее правильно, в соответствии с некоторым шаблоном. Мы хотим показать нашим исследованием, что графический метод решения задач с параметром очень вариативен при определении графических образов уравнений и неравенств. Поэтому решение, полученное правильной и полной логической цепочкой, будет засчитано, даже если оно отлично от стандартного. Однако всегда есть способ, который является более выгодным и доступным для понимания школьников. Исследуя различные способы решения задач, мы постарались выбрать наиболее понятные и простые, требующие меньше времени на решение.

Проблемы исследования:

- Задачи с параметром считаются сложными, недоступными для решения среди школьников;
- Решение задач с параметром требует много времени.

Гипотеза: для решения одной и той же задачи с параметром можно найти различные графические способы решения и среди них выбрать наиболее выгодный.

Цель: рассмотреть графические способы решения задач с параметром и оценить их преимущества и недостатки.

Задачи:

1. Выбрать задачи с параметром, которые можно решить графическим методом;

2. Решить выбранные задачи разными графическими способами;
3. Оценить преимущества и недостатки каждого способа решения задачи, сделать выводы о наиболее удачном способе решения.

Этапы исследования:

1. Исследование литературы;
2. Выбор задач для исследования;
3. Решение выбранных задач различными графическими способами;
4. Сравнение способов решения и выбор наиболее выгодного;
5. Обработка результатов исследования.

ХОД РАБОТЫ

В поисках необходимых для исследования задач с параметром мы изучали варианты ЕГЭ по математике прошлых лет, задания различных олимпиад и вступительных экзаменов. В итоге мы отобрали восемь следующих задач в качестве «показательных»:

I. Уравнения:

1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение
$$|x^2-2x-3|-2a=|x-a|-1$$
имеет ровно 3 различных решения.
2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение
$$x^2-8x=2|x-a|-16$$
имеет ровно 3 различных решения.
3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение
$$(a-2{,}5)x+1=4|x-a|$$
имеет ровно 2 различных решения.
4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение
$$x^2+(x-1)\sqrt{x-a}=x$$
имеет ровно один корень на $[0;1]$.

II. Системы уравнений:

5. При каких значениях параметра aсистема
$$\begin{cases} x=a+\sqrt{y}, \\ y^2-x^2-2x+4y+3=0 \end{cases}$$
имеет решения?

6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система
$$\begin{cases} 3|x-2a|+2|y-a|=6 \\ xy-x-2y+2=0 \end{cases}$$
имеет ровно 3 различных решения.

III. Неравенства:

7. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство
$$(1-a)\cdot 4^{\cos 2x}+2(a-4)\cdot 4^{-\sin^2 x}<-1$$
выполняется при всех x.

8. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$(x^2 - 2x + 2a^2 - a^4)\sqrt{x^2 - 5x} \le 0$$

имеет 4 целых решения.

После выбора заданий мы решили их различными графическими способами и выбрали наиболее выгодный с нашей точки зрения для каждого из них.

1. Для первой задачи наиболее выгодным является способ I, потому что метод областей понятен многим школьникам и график квадратного уравнения известен нам еще с 8 класса. Во втором же способе необходимо понимать свойства модуля и знать условие касания, которое изучается только в теме “Производная”.
2. Во второй задачи наиболее выгодным является способ II, так как для него, аналогично первой задаче, необходимо знать только уравнение параболы и метод областей.
3. Для решения третьей задачи лучше воспользоваться способом III: он не требует введения замены и основывается на методе областей. Уравнение гиперболы ученики 11 класса знают, поэтому проблем с построением графика у них возникнуть не должно.
4. Четвертая задача решается проще всего способом II, который является более наглядным и не требует рассмотрения отдельных случаев, как в способе I.
5. В пятой задаче способ I не требует знания свойств модуля, в отличие от второго способа, важно лишь внимательно записать уравнение касательной для нахождения одного из граничных значений.
6. Шестая задача решается достаточно просто способом II, если известно уравнение ромба или если ученик сумеет вывести его. Однако если этот способ кажется кому-то непонятным, мы рекомендуем изучить способ I.
7. При решении неравенства из седьмой задачи выгоднее всего заметить идею из способа I: рассмотреть квадратичную функцию относительно введенной замены и исследовать расположение ее корней в зависимости от параметра.
8. Для решения восьмой задачи способ II является наиболее выгодным, так как исследовать расположение корней квадратичной функции несложно.

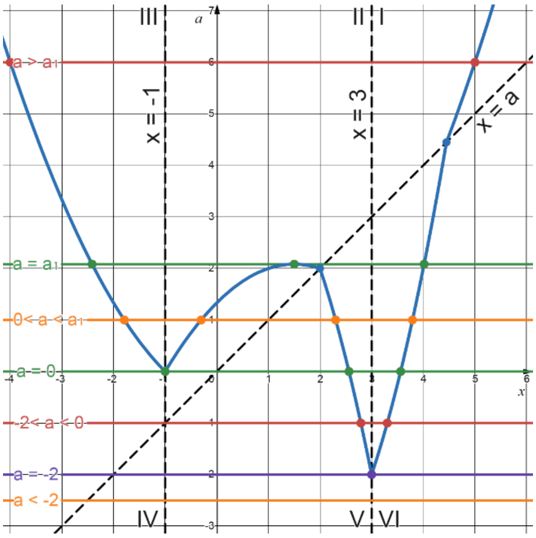
Результаты исследования:

- Мы нашли несколько различных способов графического решения к каждой из выбранных нами задач.
- С учетом количества и сложности тем, необходимых для решения задачи выбранным способом, а также количества затраченного на решение времени, мы выбрали наиболее быстрый и понятный вариант решения.

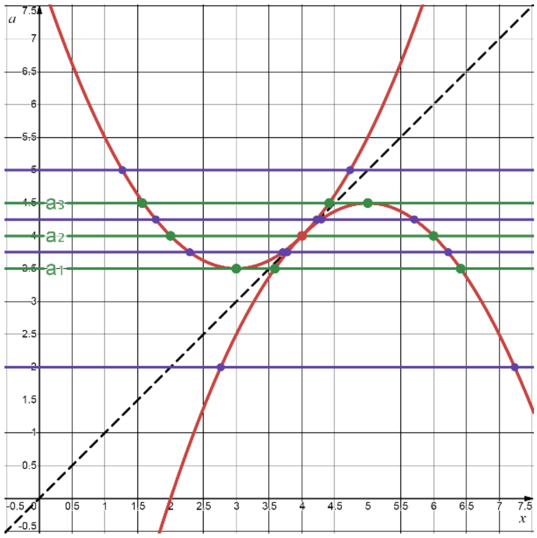
- Гипотеза, выдвинутая нами в начале исследования, подтвердилась: среди различных графических способов решения задач с параметром можно выделить наиболее выгодный для каждой из них. Цель достигнута.

Заключение: Наше исследование будет полезно не только школьникам, которых можно напугать сложностью условия задачи и которым нужна помощь в преодолении этого страха, но и начинающим исследователям, которым интересные различные способы решения задач. Способность увидеть выгодное решение той или иной задачи не только позволяет правильно ее решить, но и сэкономить время на выполнение других заданий, которое никогда не будет лишним. Надеемся, что наше увлекательное исследование заинтересует многих.

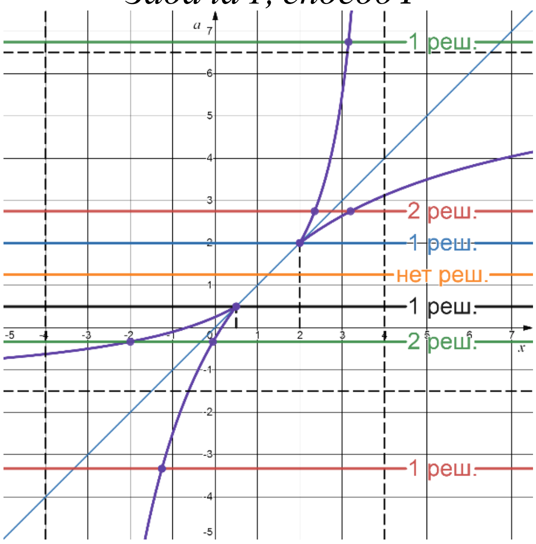
Графики «выгодных» способов:



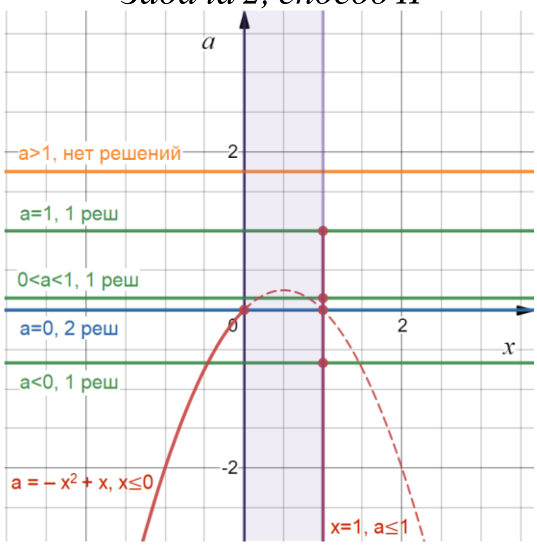
Задача 1, способ I



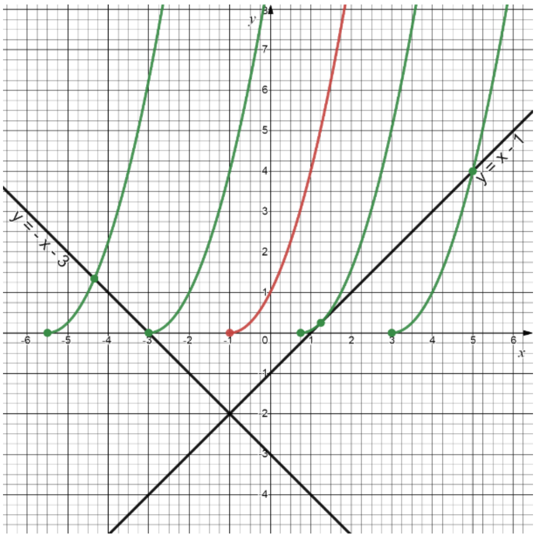
Задача 2, способ II



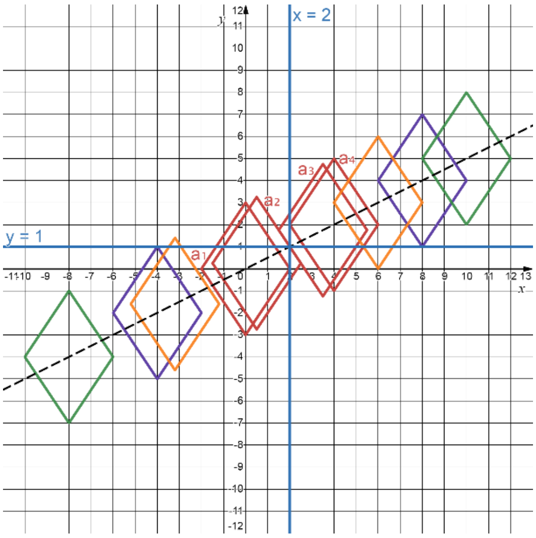
Задача 3, способ III



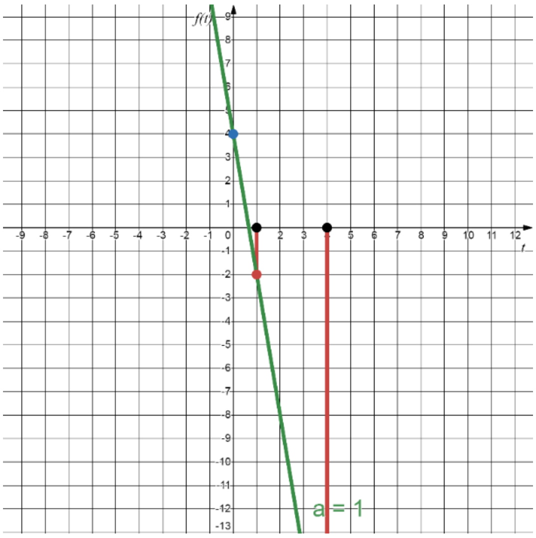
Задача 4, способ II



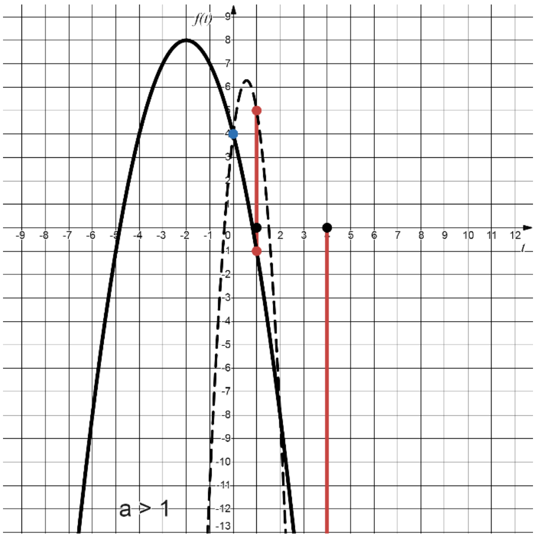
Задача 5, способ I



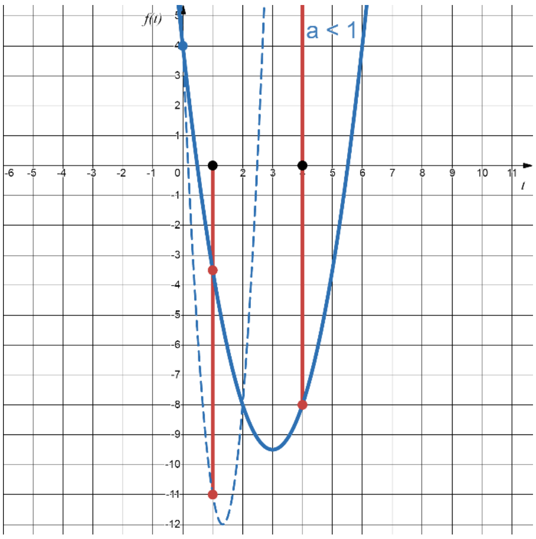
Задача 6, способ II



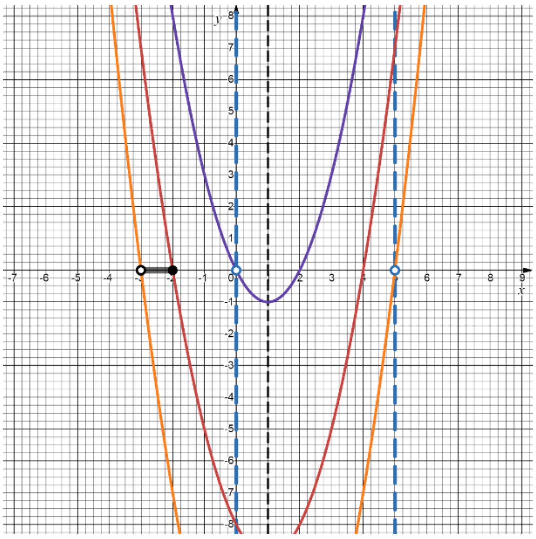
Задача 7, способ I – 1



Задача 7, способ I-2



Задача 7, способ I-3



Задача 8, способ II

ОПИСАНИЕ ПРИКЛАДНОЙ МЕТОДИКИ РАСЧЁТА МАССЫ ОЧИЩЕННОГО ЗЕРНА И ОТХОДОВ В РЕЗУЛЬТАТЕ РЕШЕНИЯМАТЕМАТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ, РЕШЕНИЕ СУЩЕСТВУЮЩЕЙ ПРОБЛЕМЫ СПРАВЕДЛИВОГО УЧЁТА ЗЕРНА И ОТХОДОВ.

***Наталия Сидорова,** 11 класс**, Леонид Сидоров,** 9 класс*

МБОУ гимназия №14 имени первого летчика-космонавта Ю.А. Гагарина, 11 класс и 9 класс

г. Ейск, МО Ейский район, Краснодарский край

Руководители: Песигина Ольга Анатольевна, учитель математики, Бородина Анастасия Петровна, учитель математические основы информатики.

Математика: — это наука об отношениях между объектами, о которых ничего не известно, кроме описывающих их некоторых свойств, именно тех, которые в качестве аксиомы положены в основание той или иной теории.

Человеческая цивилизация на протяжении нескольких тысячелетий решает конкретные прикладные задачи в промышленности, экономике, медицине, и в иных отраслях при помощи математических достижений.

Описание проблемы: Технология хранения зерна предусматривает обезличенное хранение принятых масс зерна. Обезличенное хранение – это хозяйственная операция по совместному хранению однородных партий зерна разных поклажедателей (собственников). Принятые массы зерна от разных поклажедателей могут иметь разные значения содержания сорной примеси. В результате масса сорного зерна подлежит переделыванию на массу чистого зерна и массу отходов от подработки зерна с содержанием сорной примеси 98,00% и более процентов. При этом технологическая линия подработки зерна не предусматривает весового оборудования по определению массы чистого зерна и массы отходов после операции сепарирования.

Актуальность: Поиск решения правильного начисления масс зерна и отходов от подработки зерна между поклажедателями (собственниками зерна) после обезличенной (совместной) подработки зерна на элеваторах.

Рассмотрение степени научной разработанности проблемы. Авторами проведено изучение ряда существующих математических методов расчёта количества отходов от подработки зерна, в частности: Количественно-качественный учёт зерна и зернопродуктов. / С.Л. Маевская, О.А. Лабутина. 2-е издание. – М.: 2003. – 296 с. [2]; Инструкция о порядке ведения учета и оформления операций с зерном и продуктами его переработки на предприятиях хлебопродуктов системы Министерства заготовок СССР (9-1). Иные источники.

В настоящей работе авторами описывается: методика расчёта массы очищенного зерна и отходов в результате решения математического уравнения с двумя неизвестными, справедливый учёт зерна и отходов.

Аналогов, в которых была бы описана предлагаемая методика, расчёта массы очищенного зерна и отходов, в результате решения математического уравнения с двумя неизвестными, **в уровне техники не обнаружено.**

Цель научно-исследовательской работы:

Разработать методику расчёта образуемой массы очищенного зерна и образуемой массы отходов после очистки сорного зерна.

Задачи:

1) Описать расчёт определения совокупной массы и средневзвешенного значения сорной примеси разных по массе и содержанию сорной примеси партий зерна; **2)** Описать методику расчёта образуемой массы очищенного зерна и образуемой массы отходов после сепарирования массы сорного зерна.

Гипотеза: Подтверждение точности математического расчёта количества образуемой массы чистого зерна и массы отходов после подработки сорного зерна методом физического взвешивания продуктов передела сорного зерна.

Новизна исследования:

Авторами описана методика математического расчёта массы очищенного зерна и образуемой массы отходов после сепарирования сорного зерна.

Объект исследования:1) Партии сорного зерна до очистки; **2)** Партия чистого зерна после очистки; **3)** Партия отходов после очистки.

Предмет исследования:1) Количество и качество партии сорного зерна до очистки; **2)** Количество и качество партии чистого зерна после очистки; **3)** Количество и качество партии отходов после очистки.

Методы исследования: 1) Применение математического расчёта для вычисления совокупной массы и средневзвешенного значения нескольких партий при обезличенном хранении сорного зерна. **2)** Применение математического расчёта выхода очищенного зерна и отходов при подработки сорного зерна при обезличенном хранении и обезличенном сепарировании.

I. Модель математического уравнения с двумя неизвестными.

Модель математическое уравнение с двумя неизвестными для расчёта массы очищенного зерна с известной величиной сорной примеси в очищенном зерне и расчёта массы отходов от подработки зерна с известной величиной содержания сорной примеси в отходах от подработки знрна.

$$\mathbf{Ссп = (Х * Соз + У * Сот) / Мз}$$

Ссп – процент содержание средневзвешенного значения сорной примеси в принятой совокупной массе сорного зерна, (%); **Х** – масса очищенного зерна с известной величиной остаточного содержания сорной примеси, (кг); **У** – масса отходов от подработки зерна с известной величиной содержания сорной примеси, (кг); **Соз** – процент содержания сорной примеси в очищенном зерне (оз), (%); **Сот** – процент содержания сорной примеси в отходах, (%); **Мз** – масса принятой на хранение партии сорного зерна, (кг); **Х** и **У** – это искомые величины представленного уравнения, (кг).

1.1. Описание исходных данных математического уравнения с двумя неизвестными.

Мз = 2 780 640кг; Сcп = 7,20%; Соз = 0,90%; Сот = 98,80%.

Задание: 1) Рассчитать массу очищенного зерна (**Х**) с содержанием сорной примеси 0,90%; 2) Рассчитать массу отходов от подработки партии сорного зерна (**У**) с содержанием сорной примеси 98,80%.

Алгоритм математических действий по расчёту неизвестных величин «Х» и «У».

Первое действие: расчёт процента убыли сорной примеси (Су) при подработке зерна рассчитывается по формуле №1.

Формула №1. **Су = (Ссп – Ср) * 100 / 100 – Ср, (%).**

Су – процент убыли сорной примесит, (%);

Сп – процент сорной примеси в зерне до очистки (сор по приходу), (%);

Ср – процент сорной примеси в зерне после очистки (сор по расходу), (%).

Рассчитываем процент убыли сорной примеси (Су).

Су = (7,20 – 0,90) * 100 / 100 – 0,90 = 630 / 99,10 = **6,36%.**

Второе действие: расчёт массы сора, отделённого при подработки сорного зерна, производится по формуле 2. **Формула №2. Мсп=Мз(кг)*Су(%)/100 (%).**

Мсп – масса отделённого сора при подработке сорного зерна, (кг);

Мз = 2780640(кг); Су = 6,36(%). Мсп = 2780640(кг) * 6,36(%)/100(%) = 176 849кг.

Третье действие: расчёт массы отходов состоящие из двух фракций сора и полезного зерна осуществляется по формуле 3. **Формула №3. У=Мсп*100/Сот**

Расчёт массы отходов (У) состоящие из **99,10%** сорной примеси и 0,90% полезного зерна. **У** = 176 849кг * 100% / 99,10% = **178 455кг**.

Итог расчёта значения «У»: количество (масса) 178 455 кг отходов с содержанием сорной примеси в значении 99,10% в массе отходов от подработки сорного зерна в анализируемой партии.

Разъяснение: *разница между массой отходов и массой сора есть количество полезного зерна, которое при сепарировании сорного зерна попало в отходы. 178455кг – 176849кг = 1606кг, что соответствует следующему проценту содержания полезного зерна в отходах, образованных при сепарации сорного зерна: 1606кг * 100% / 178 455кг = 0,90%*

Четвёртое действие: расчёт массы очищенного зерна с содержанием сорной примеси **0,90%.** Х=Мз–У, (кг). **Х** = 2 780 640кг – 178 455кг = **2 602 185кг**.

Итог расчёта значения «Х»: количество (масса) 2 602 185кг с очищенного зерна содержанием сорной примеси в значении 0,90% есть масса очищенного зерна после подработки сорного зерна анализируемой партии.

Результат:

Результат математического расчёта образованной массы очищенного зерна и образованной массы отходов от подработки сорного зерна, массы сорного зерна в количестве 2780640кг с содержанием сорной примеси 7,20% образовалась масса очищенного зерна в количестве 2602185кг с содержанием сорной примеси 0,90% и образовалась масса отходов в количестве 178455кг с содержанием сорной примеси 99,10%.

1.2. Поверка справедливости произведённых расчётов неизвестных значений «X» и «У».

В таблице №1 представлена масса и содержание сорной примеси как данные по сорному зерну, так и по очищенному, и по отходам.

Таблица №1

П/№	Номенклатура	Масса, кг	Сорная примесь, %	К * % (3 * 4)
1	2	3	4	5
А	Сорное зерно	**2 780 640,00**	**7,20**	20 020 608,00
Б	Чистое зерно	2 602 185,00	0,90	2 341 966,50
В	Отходы	178 455,00	99,10	17 684 890,50
Г	Г = Б + В	**2 780 640,00**	**7,20**	20 26 857,00

Алгоритм проверки заключается в следующем: **1)** совокупная масса очищенного зерна и отходов равняется массы сорного зерна; 2**)** сумма килограмм процентов очищенного зерна и отходов суммируется, результат строка «Г» колонка 5-ть; 3**)** сумму килограмм процентов делим на совокупную массу продуктов передела строка «Г» колонка 3-и.

Действие первое: Суммируем массу отходов от подработки зерна (строка 2) с массой очищенного зерна (строка 3): 178455+260185=2780640,00кг. Таким образом физическая масса сорного зерна, поданная на подработку, равняется сумме двух масс, полученных после подработки зерна (масса отходов + масса очищенного зерна).

Действие второе: Суммируем (килограмм проценты, строка 2) отходов от подработки с (килограмм проценты, строка 3): 17 684 890,50кг*% + 2 341 966,50кг*% = 20 026 857,00кг*%.

Действие третье: Совокупное значение (килограмм проценты, строка 2 + строка 3) делим на совокупную массу отходов от подработки + массу очищенного зерна (действие второе): 20 026 857,00кг*% / 2 780 640,00кг = 7,20%. Величина 7,20% есть совокупное значение сорной примеси в двух продуктах подработки сорного зерна (отходов и очищенного зерна).

Результат: сорная примесь по приходу равняется совокупной сорной примеси по расходу строка «А» колонка 4-е равна строке «Г» колонка 4-е.

Это означает что масса и качество продуктов передела сорного зерна — это чистое зерно и отходы масса отходов и масса чистого зерна определено правильно с указанием правильного содержания сорной примеси в продуктах передела сорного зерна.

Вывод:1. Применение на практике, описанной математической модели позволяет в отрасли уйти от необходимости создания в технологической линии узлов весового учёта очищенного зерна и отходов от подработки сорного зерна. **2.** Описанная математическая модель имеет конкретное прикладное значение в элеваторной промышленности. **3.** Применение описанной математической модели расчёта выхода очищенного зерна и отходов при подработки сорного зерна при обезличенном хранении и обезличенной очистке позволяет практически со сто процентной точностью рассчитать массу очищенного зерна и массу образуемых отходов при сепарации сорного зерна.

Заключение.

Авторами описана модель (способ) решения конкретного прикладного математического уравнения с двумя неизвестными.

Решения описанного уравнения позволяет в конкретных условиях на конкретных предприятиях провести оптимизацию технологической линии подработки партий зерна с упразднением весового оборудования учёта (определения весовых характеристик) очищенных масс зерна и полученных после очистки масс отходов от подработки зерна или побочного продукта.

Описанная авторами прикладная математическая модель решения уравнения с двумя неизвестными позволяет в элеваторной промышленности решать конкретные экономические задачи, в частности снижение себестоимости подработки зерна за счёт оптимизации технологической линии очистки сорного зерна (снижения сорной примеси в зерне).

На практике изучена возможность применения, предлагаемого авторами расчётного метода определения масс очищенного зерна и масс отходов от подработки сорного зерна.

Авторами решены сформулированные задачи и достигнута поставленная цель.

Автором подтверждена сформулированная гипотеза. Подтверждение точности математического расчёта количества образуемой массы чистого зерна и массы отходов после подработки сорного зерна методом физического взвешивания продуктов передела сорного зерна.

Авторами рекомендовано: Рассмотреть предлагаемый расчётный метод определения масс очищенного зерна и масс отходов от подработки сорного зерна на действующих предприятиях для внедрения в практику.

В настоящее время ряд предприятий в элеваторной промышленности рассматривают предлагаемый расчётный метод определения масс очищенного зерна и масс отходов от подработки сорного зерна для внедрения в практику.

В четырёх регионах Российской Федерации на 8-ми предприятиях описанная авторами математическая модель внедрена в практику.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. ГОСТ 9353 – 2016 Пшеница. Технические условия.
2. Количественно-качественный учёт зерна и зернопродуктов. / С.Л. Маевская, О.А. Лабутина. 2-е издание. – М.: 2003. – 296 с.

3. Инструкция о порядке ведения учета и оформления операций с зерном и продуктами его переработки на предприятиях хлебопродуктов системы Министерство заготовок СССР (N 9-1).
4. Инструкция по очистке и выделению мелкой фракции зерна, эксплуатации зерноочистительных машин на элеваторах и хлебоприемных предприятиях (N 9-5-82).
5. Галкин Е.Г. Задачи с целыми числами. Челябинск «Взгляд» 2004г.
6. Глейзер Е.И. История математики в школе. Москва «Просвещение» 1983г.
7. Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа 10-11 класс. Москва 2003г.

МЕТОДЫ НАХОЖДЕНИЯ РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ СКРЕЩИВАЮЩИМИСЯ ПРЯМЫМИ

Сальцов Глеб Геннадьевич

Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение лицей при ТПУ, 11 класс

г. Томск

Руководитель: Букина Ольга Владимировна, учитель математики

Задачи по стереометрии являются одними из самых сложных заданий ЕГЭ, ведь требуют пространственного мышления и знания теорем. А ещё это связано с тем, что редко какая задача стереометрии может быть решена с использованием определенной формулы и прежде чем приступить к решению задачи, следует наглядно представить, вообразить, нарисовать фигуры, о которых идет речь в ее условии. Пространственные задачи вызывают трудности у старшеклассников, немногие приступают к выполнению задач по стереометрии, несмотря на то, что они дают большое количество баллов на экзамене. Особые трудности вызывают задания на нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми, так как далеко не всегда удаётся построить общий перпендикуляр и вычислить его длину.

В своем проекте я собрал различные методы решения задач на данную тему и постарался применить их для решения одной задачи, так как считаю, что полезнее одну задачу решить несколькими способами, чем решить несколько однотипных задач одним способом. Также я подобрал еще несколько задач, для решения которых используются разобранные мной способы. Надеюсь, такой сборник поможет старшеклассникам лучше подготовиться к Единому государственному экзамену.

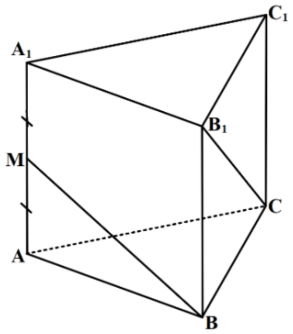
Задачи проекта:

1. Изучить методы решения задач на нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми.

2. Освоить применение данных методов на практике.
3. Составить сборник задач на тему «Нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми разными методами при решении одной задачи».

В своей работе я рассматриваю следующие способы нахождения расстояния между скрещивающимися прямыми:

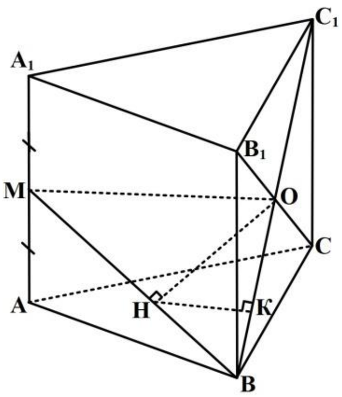
- нахождение общего перпендикуляра к двум прямым;
- нахождение расстояния от одной из скрещивающихся прямых до параллельной плоскости, проходящей через другую прямую;
- нахождение расстояния между параллельными плоскостями, в которых находятся данные прямые;
- нахождение расстояния между проекциями данных прямых на плоскость, перпендикулярную одной из этих прямых;
- нахождение расстояния между прямыми координатными методами (метод плавающих точек; метод с использованием векторного и смешанного произведения векторов; метод с использованием проекции одного вектора на направляющий вектор общего перпендикуляра).



Рассмотрим применение данных методов для решения следующей задачи.

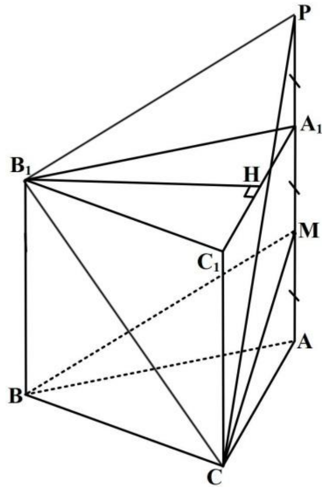
В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны 2, M – середина AA_1. Найти расстояние между прямыми BM и B_1C.

1. Нахождение общего перпендикуляра к двум прямым.



В боковой грани BCC_1B_1 проведём дополнительное построение $BC_1 \cap B_1C = O$. Рассмотрим ΔMBC_1, он равнобедренный, т.к. $MB = MC_1$, MO – медиана, высота, а значит, $MO \perp BC_1$. Заметим, что $MO \perp BC_1$, $MO \perp BC$, $BC \cap BC_1$, следовательно, $MO \perp BCC_1$. В ΔMBO проведём дополнительное построение $OH \perp MB$, $HK \perp OB$. Докажем, что OH – общий перпендикуляр. Отрезок HK параллелен MO, а значит, $HK \perp BCC_1$. Заметим, что $OB \perp CB_1$ из этого следует, по теореме о трёх перпендикулярах, что $OH \perp CB_1$. Получили, что $OH \perp CB_1$, $OH \perp MB$, а значит, OH – искомое расстояние. Рассмотрим ΔMBO, он прямоугольный, т.к. $MO \perp BO$, $BO = \sqrt{2}$, $MO = \sqrt{3}$, $MB = \sqrt{3}$, $OH = \dfrac{BO \cdot MO}{MB} = \dfrac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{30}}{5}$.

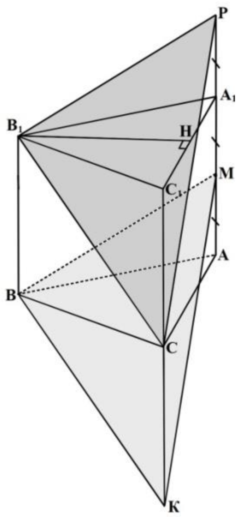
2. Нахождение расстояния от одной из скрещивающихся прямых до параллельной плоскости, проходящей через другую прямую.



Дополнительное построение: отложим на продолжении MA отрезок A_1P так, что MP = AA_1. BB_1PM – параллелограмм, т.к. BB_1 = MP и $BB_1 || MP$. Рассмотрим CPB_1 и BM: $BM || CPB_1$ по признаку параллельности прямой и плоскости, а значит, $\rho(MB;CB_1) = \rho(MB;CPB_1) = \rho(M;PCB_1) \overset{\text{об}}{=} d$. Найдём d из объёма тетраэдра $MCPB_1$. В $\Delta A_1B_1C_1$ построим $B_1H \perp A_1C_1$. Рассмотрим тетраэдр $MCPB_1$, его объём можно рассчитать двумя способами. $V_{MCPB_1} = \frac{1}{3} \cdot S_{MCP} \cdot HB_1$, $V_{MCPB_1} = \frac{1}{3} \cdot S_{CPB_1} \cdot d$. $d = \frac{S_{MCP} \cdot HB_1}{S_{CPB_1}}$.

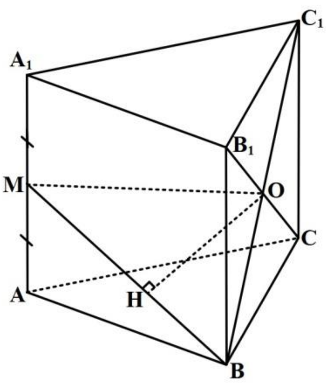
$S_{CPB_1} = \sqrt{10}$, $S_{CPM} = 2$. $d = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{30}}{5}$.

3. Нахождение расстояния между параллельными плоскостями, в которых находятся данные прямые.



Найдём параллельные плоскости, в которых лежат прямые BM и CB_1. Дополнительное построение: отложим на продолжении MA отрезок A_1P так, что $MP = AA_1$. BB_1PM – параллелограмм, т.к. $BB_1 = MP$ и $BB_1 || MP$. Отложим на продолжении CC_1 CK так, чтобы $KC = CC_1$, тогда $CKBB_1$ – параллелограмм. Заметим, что плоскости MKB и PCB_1 параллельны, тогда искомое расстояние и есть расстояние между этими плоскостями. $\rho(CPB_1;MBK) = \rho(M;CPB_1)$, данное расстояние было найдено в пункте 2.

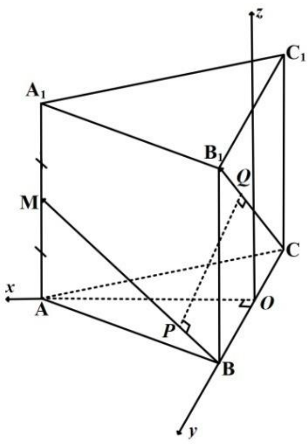
4. Нахождение расстояния между проекциями этих прямых на плоскость, перпендикулярную одной из прямых.



Рассмотрим плоскость BMC_1 и найдём ортогональные проекции наших прямых на эту плоскость. $B_1C \perp BMC_1$, т.к. $B_1C \perp BC_1$, как диагонали квадрата, $B_1C \perp MO$, по доказанному ранее. Тогда $B_1C \cap MBC_1 = O$. Заметим, что $MB \in MCC_1$, а значит $\rho(CB_1;MB) = \rho(O;MB)$. В ΔMOB проведём высоту OH к MB, треугольник прямоугольный, поэтому $OH = \frac{MO \cdot OB}{MB} = \frac{\sqrt{30}}{5}$.

5. Координатные методы.

5.1 Метод плавающих точек



В ΔABC проведём высоту АО. Введём систему координат с началом отсчёта в точке О. Пусть PQ – общий перпендикуляр к двум прямым, где $P \in MB$, $Q \in CB_1$, $PQ \perp MB$, $PQ \perp CB_1$, $P(x_1; y_1; z_1)$, $Q(x_2; y_2; z_2)$; Тогда $\rho(BM; CB_1) = |\overrightarrow{PQ}|$. $\overrightarrow{BM} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BP}$, тогда их координаты пропорциональны. $\overrightarrow{BM}\{\sqrt{3}; -1; 1\}$, B(0;1;0), тогда $\overrightarrow{BP}\{\sqrt{3}k; -k; k\}$, с другой стороны $\overrightarrow{BP}\{x_1; y_1 - 1; z_1\}$, следовательно, $x_1 = \sqrt{3}k$, $y_1 = -k + 1$, $z_1 = k$, $P(\sqrt{3}k; -k + 1; k)$. $\overrightarrow{CQ} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CB_1}$, тотгда их координаты пропорциональны. $\overrightarrow{CB_1}\{0;2;2\}$, $Q(x_2; y_2; z_2)$, $C(0;-1;0)$, тогда $\overrightarrow{CQ}\{0;2m;2m\}$, с другой стороны $\overrightarrow{CQ}\{x_2; y_2 + 1; z_2\}$, а значит, $x_2 = 0$, $y_2 = 2m - 1$, $z_2 = 2m$, $Q(0;2m-1;2m)$. Получили, что $P(\sqrt{3}k; -k + 1; k)$, $Q(0;2m-1;2m)$, тогда $\overrightarrow{PQ}\{-\sqrt{3}k; 2m + k - 2; 2m - k\}$. Зная, что $PQ \perp MB$ и $PQ \perp CB_1$, получим $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$, $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{CB_1} = 0$, следовательно, $\begin{cases} -3k - 2m - k + 2 + 2m - k = 0 \\ 4m + 2k - 4 + 4m - 2k = 0 \end{cases}$.

$k = \dfrac{2}{5}, m = \dfrac{1}{2}$, а значит, $\overrightarrow{PQ}\left\{-\dfrac{2\sqrt{3}}{5}; -\dfrac{3}{5}; \dfrac{3}{5}\right\}$. $|\overrightarrow{PQ}| = \dfrac{\sqrt{30}}{5}$.

5.2 Метод с использованием смешанного и векторного произведений векторов

В ΔABC проведём высоту АО. Введём систему координат с началом отсчёта в точке О. Направим вектора вдоль CB_1, BB_1 и BM. Получившиеся вектора имеют координаты $\overrightarrow{CB_1}\{0;2;2\}$, $\overrightarrow{BB_1}\{0;0;2\}$, $\overrightarrow{BM}\{\sqrt{3}; -1; 1\}$. Тогда $\rho(CB_1; BM) = \dfrac{|\overrightarrow{CB_1} \cdot \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BB_1}|}{|\overrightarrow{CB_1} \times \overrightarrow{BM}|}$.

Пусть $m = \overrightarrow{CB_1} \cdot \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BB_1} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ \sqrt{3} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -4\sqrt{3}$. Пусть $\vec{p} = \overrightarrow{CB_1} \times \overrightarrow{BM}$,

$\overrightarrow{CB_1} \times \overrightarrow{BM} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ \sqrt{3} & -1 & 1 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix} = 4\vec{i} + 2\sqrt{3}\vec{j} - 2\sqrt{3}\vec{k}$ тогда $\vec{p}\{4;2\sqrt{3};-2\sqrt{3}\}$,

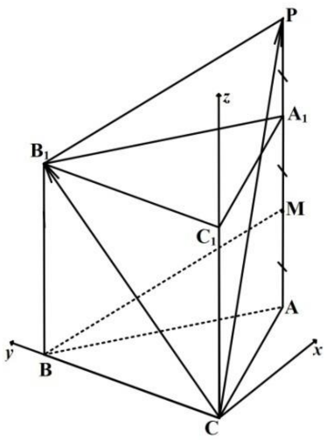
$|\vec{p}| = 2\sqrt{10}$. $\rho(CB_1;BM) = \dfrac{\sqrt{30}}{5}$.

5.3 Метод с использованием проекции одного вектора на направляющий вектор общего перпендикуляра

В ΔABC проведём высоту AO. Введём систему координат с началом отсчёта в точке O. Направим вектора вдоль CB_1, BB_1 и BM. Получившиеся вектора имеют координаты $\overrightarrow{CB_1}\{0;2;2\}$, $\overrightarrow{BB_1}\{0;0;2\}$, $\overrightarrow{BM}\{\sqrt{3};-1;1\}$. Пусть $\vec{p}\{x;y;z\}$ – направляющий вектор общего перпендикуляра BM и CB_1, тогда $\vec{p} \cdot \overrightarrow{CB_1} = 0$, $\vec{p} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$, а значит, $\begin{cases} 2y + 2z = 0 \\ \sqrt{3}x - y + z = 0 \end{cases}$, пусть y=1, тогда z= -1, $x = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

$$\rho(MB;CB_1) = \frac{|\vec{p} \cdot \overrightarrow{BB_1}|}{|\vec{p}|} = \frac{2 \cdot 3}{\sqrt{30}} = \frac{\sqrt{30}}{5}.$$

8. Метод с использованием формулы расстояний



Дополнительное построение: продлим MA_1 до P так, что MP = AA_1. BB_1PM – параллелограмм, т.к. BB_1 = MP и $BB_1 || MP$. Рассмотрим CPB_1 и BM: $BM || CPB_1$, по признаку параллельности прямой и плоскости, а значит, $\rho(MB;CB_1) = \rho(MB;CPB_1) = \rho(B;KCB_1) \overset{об}{=} d$. Введём систему координат с началом отсчёта в точке C, тогда B(0;2;0). Найдём уравнение плоскости CPB_1, будем искать в виде Ax+By+Cz=0. Пустим векторы по CB_1 и CP, тогда они имеют координаты: $\overrightarrow{CB_1}\{0;2;2\}$,

$\overrightarrow{CP}\{\sqrt{3};1;3\}$. Пусть $\vec{n}=\overrightarrow{CB_1}\times\overrightarrow{CP}=\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ \sqrt{3} & 1 & 3 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix}=4\vec{i}+2\sqrt{3}\vec{j}-2\sqrt{3}\vec{k}$,

получим, что $\vec{n}\{4;2\sqrt{3};-2\sqrt{3}\}$, а значит, уравнение плоскости CPB_1 имеет вид $2x+\sqrt{3}y-\sqrt{3}z=0$. $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{30}}{5}$.

Вывод: Приведённые методы наглядно показывают многогранность свойств геометрических фигур, координатный метод помогает решить аналитически геометрическую задачу. Знание различных подходов к решению одной задачи помогает решить её наиболее оптимальным методом, сэкономить время, что очень важно на экзамене. Также я составил сборник задач, которые решаются несколькими способами. Я надеюсь, что он поможет старшеклассникам разобраться в данном типе задач, подготовиться к ЕГЭ.

МУЗЫКАЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА ИЛИ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МУЗЫКА

Севастьянова Арина

Муниципальное бюджетное образовательное учреждение лицей №3, 8 класс

г. Иркутск

Руководитель Жученя Наталья Григорьевна, учитель математики

Музыка – это самый красивый и многогранный вид искусства. В переводе с греческого «музыка» означает «искусство муз» [1]. У каждого искусства имеется свой язык: живопись говорит с людьми при помощи красок, цветов и линий, литература – при помощи слова, а музыка – с помощью звуков. Музыка - это источник вдохновения, прекрасная составляющая и неотъемлемая часть в жизни каждого человека. Потому что музыка – это искусство воспроизведения мыслей, чувств и ощущений в звуках, слагающееся из трех элементов: мелодии, гармонии и ритма [5].

Казалось бы, искусство - весьма отвлеченная от математики область. Однако связь математики и музыки обусловлена как исторически, так и внутренне, несмотря на то, что математика - самая абстрактная из наук, а музыка - наиболее отвлеченный вид искусства.

Ранее я задавалась рядом вопросов, в числе которых: как музыка влияет на наше настроение? Почему определенные мелодии, структуры, ноты, сочетания, гармонии вызывают соответствующие им определенные чувства?

Есть ли законы, описывающие этот процесс? Можно ли их описать математически?

Поэтому целью моего исследования являетсяустановление взаимосвязи между музыкой и математикой.

Для решения цели были поставлены следующие задачи:

1.Выяснить, были ли в истории попытки связать музыку с математикой.

2. Выявить общие элементы между звуками и числами;

3. Провести свои исследования по выявлению математических закономерностей в музыке.

Объект исследования - математика и музыка.

Предмет исследования — элементы математики в музыке.

Методы исследования: поисковый метод, изучение, описание, анализ, сравнение, размышление, обобщение.

Предполагаемые элементы новизны заключаются в том, что любое музыкальное произведение можно представить в виде математического, а математическое в виде музыкального.

Результаты данной работы могут быть полезны всем, кто занимается музыкальным искусством и всем кто увлекается математикой.

Исторические аспекты исследования

Первый, кто заговорил о связи математики и музыки был Пифагор. Он сделал открытие в области теории музыки. Суть это открытия состоит в том, что сочетание звуков, издаваемых струнами, наиболее благозвучно, если длины струн музыкального инструмента находятся в правильном численном отношении друг к другу.

Для воплощения своего открытия Пифагор использовал монохорд - полуинструмент, полуприбор. Под струной на верхней крышке ученый начертил шкалу, с помощью которой можно было делить струну на части. Было проделано много опытов, в результате которых Пифагор описал математически звучание натянутой струны. Не зная математических понятий, не умея различать дроби, не умея сравнивать их, невозможно было бы сыграть музыкальный фрагмент.

Также, математика является вполне подходящим средством для описания музыкальных моделей. Пифагор, по распространенной версии, пытался свести всеобщую гармонию к числам. Например, канон Пифагора.

Названия тетрахордов указывают на соответствующие области Греции и Малой Азии, каждая из которых пела в своем ладу. Конечно, четырех струн в пределах кварты было мало для ведения мелодии, поэтому тетрахорды соединялись. Так как октава состоит из двух кварт и тона; следовательно, в пределах октавы можно расположить два тетрахорда, разделенных интервалом в тон. Объединяя с помощью разделительного тона два одноименных тетрахорда, получили октаву, которую греки назвали «гармония». Именно в античной теории музыки слово «гармония» обрело свое современное значение – согласие разногласного. Таких основных видов гармонии по числу тетрахордов получилось три: дорийская: 1/2 – 1 – 1 – 1 – 1/2 — 1 – 1; фригийская: 1 – 1/2 — 1 – 1 – 1 – 1/2 – 1; лидийская: 1– 1 — 1/2. Здесь 1 обозначает тон, 1/2 — полутон. Эти античные гармонии сопоставимы с современными гаммами. В самом деле, каждый, знакомый с азами музыкальной грамоты, узнает в лидийской гармонии обычный натуральный мажор (2 тона – полутон, 3 тона – полутон, или на белых клавишах фортепиано до – ре – ми – фа – соль – ля – си – до). А в дорийской и фригийской – почти натуральный минор (т. к в сравнении с натуральным минором (1 – ½ — 1 – 1 – ½ — 1 – 1) у дорийской гаммы понижена вторая ступень, а у фригийской – повышена шестая).

Легко получить математическое выражение гаммы, зная размеры интервалов, образующих лидийскую гармонию и правила действия с ними. Приняв частоту нижнего тона за единицу f1=1, находим первый тетрахорд:

f1=1, f2=9/8, f3=9/8*9/8 = 81/64, f4=4/3. Второй тетрахорд получается сдвигом первого на квинту: f5=3/2f1=3/2, f63/2f2=27/16, f7=3/2f3=243/128, f8=3/2f4=2. Окончательно для интервальных коэффициентов имеем

1 9/8 81/64 4/3 3/2 27/16 243/128 2

до ре ми фа соль ля си до

Это и есть канон Пифагора[3]

Успеха, доказывая связь математики и музыки, добился ученый и музыкант Андреас Веркмейстер, установивший равномерное отношение между тонами, с помощью математики ввел равномерный темперированный музыкальный строй, который мы и сегодня можем увидеть и услышать у современных клавишных инструментов. Темперация – музыкальная система, основанная на полном равенстве всех двенадцати полутонов октавы [2]. Благодаря темперации на клавесине, стало возможно играть в тональностях с любым количеством знаков. Бахдоказал это своим сборником «Хорошо темперированный клавир», в котором представлены все двадцать четыре тональности; прелюдии и фуги расположены в порядке хроматической гаммы. Ф. Шопен, а позже А. Скрябин в своих сборниках прелюдий также расположили их во всех двадцати четырех тональностях, в порядке квинтового круга мажорных тональностей, с параллельным минором после каждой из них [4].

Связь музыки и математики

Математика (греч. – знание, наука). Математика – царица всех наук, символ мудрости. Красота математики является одним из связующих звеньев науки и искусства.

Музыка (греч. – искусство муз), значит искусство, отражающее действительность в звуковых, художественных образах.

Музыка математична, а математика музыкальна (рис.1).

1. Цифровые обозначения.

Как и в математике, в музыке встречаются цифры: звукоряд – 7 нот, нотный стан – 5 линеек. Интервалы: прима – 1, секунда – 2, терция – 3, кварта – 4, квинта – 5, секста – 6, септима – 7, октава – 8. Обозначения аппликатуры и размер произведения записывается тоже при помощи цифри там и тут господствуют идея числа и отношения. Исходя из этого, можно провести следующие параллели.

Рисунок – 1 Цифровые обозначения в музыке

2. Ритм.

Ритм важнейший элемент в музыке. У каждого музыкального произведения свой ритмический рисунок (чередование нот разной длительности). Числа, оказывается, тоже обладают ритмом.

Например, числа кратные 3(трём) обладают следующим ритмом: Начнем с 0 и, увеличивая каждый раз на 1, будем акцентировать все числа, кратные 3. Получается 0 1 2 3 4 5 6 7 8…. и т.д. Получается красивый, правильный, равномерный ритм, звучащий как музыкальный размер 3/4, который соответствует вальсу.

Если посчитать числа, кратные двум 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 и т.д. то увидим, что мы пришли к ритму, звучащему, как музыкальный размер 2/4. Таким образом, числа обладают ритмом (рис. 2).

Рисунок 2 – Числовой ритм или ритмичные цифры

3. Наличие в музыке и математике противоположностей (табл.1).

Таблица – 1 Противоположности в музыке и математике

Музыка	Математика
Мажор – минор	Плюс-минус
Быстро – медленно	Больше – меньше
Тихо – громко	Сложение – вычитание
Низкий звук – высокий звук	Умножение – деление
Бемоль (понижение) – диез (повышение)	Четное число – нечетное число

4. «Дроби».

В целой ноте – две половинки, четыре четвертных, восемь восьмых, 16 шестнадцатых. Значит, что длительности получаются так же, как и дроби: они появляются при делении целой на равные доли. Поэтому длительность можно подсчитывать так же как дробные числа: 1/2, ¼, 1/8, 1/16 (рис. 3). Следовательно, названия длительностей служат одновременно и названиями чисел.

Рисунок - 3 Дроби в музыке.

5. Понятие параллельности.

Это – параллельные тональности (например, домажор – ля минор), а ещё линии нотного стана всегда параллельны, то есть, никогда не пересекаются.

Таким образом, я выделила 5 совпадений музыки с математикой, из чего можно сделать вывод, что занимаясь музыкой, человек развивает и тренирует свои математические способности.

Исследования по выявлению математических закономерностей в музыке

Существует множество примеров, как использовать математические знания в музыке. Но я хотела бы остановиться на примере, как можно не зная музыки, при помощи математических вычислений написать музыкальное произведение. Это возможно при помощи цепи Маркова.

Получается, что каждое новое событие зависит только от предыдущего и не зависит от всех остальных до него. Цепи Маркова — это последовательность событий или действий, где каждое новое событие зависит только от предыдущего и не учитывает все остальные события

При помощи математики можно создать музыкальное произведение в стиле любого композитора. Для этого нужны цепи Маркова[6], например, чтобы создать мелодию в стиле известного музыкального произведения Вольфганга Амадея Моцарта «Колыбельная», всем известного как «Спи, моя радость, усни…».

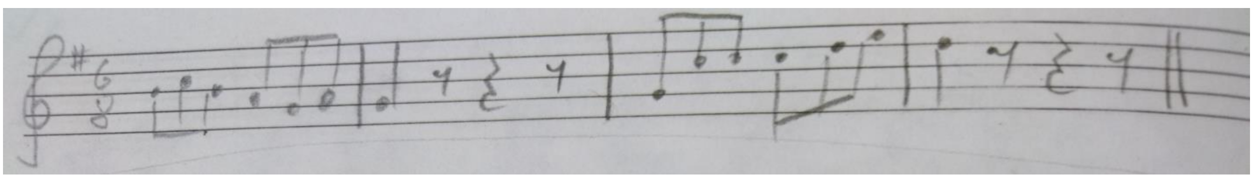


Рисунок – 4 Ноты начала произведения «Колыбельная».

В таблице 2 показано, сколько раз каждая нота встречается в этой мелодии:

Таблица – 2 Количество нот

си	до	ля	соль	ре	ми
2	4	2	3	2	1

Может показаться, что если мы хотим написать мелодию в этом же стиле, в новой мелодии ноты должны располагаться в точно таком же соотношении. Но в действительности такая мелодия будет иметь мало общего с оригиналом.

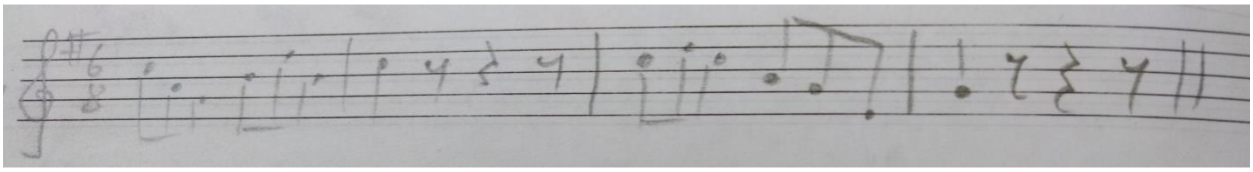


Рисунок – 5 Расположение нот на нотном стане сообразно таблице 2

Вместо того чтобы анализировать, сколько раз в мелодии встречается каждая нота, с помощью цепей Маркова можно определить, в какой последовательности они располагаются. 14 нот мелодии упорядочены с помощью 12 переходов: первый переход *си-до*, второй — *до-до* и так далее. Максимально возможное число переходов равняется $6 \cdot 6 = 36$, но не все они используются в этой мелодии.

В таблице 3приведено число переходов каждого типа.

Таблица 3 –Число переходов

		Следующая нота						Итого
		си	до	ля	соль	ре	ми	
Нота	си			1				1
	до	1	2			1		4
	ля				2			2
	соль		1	1		2		2
	ре						1	1
	ми					1		1

Даже если мы выберем первую ноту произвольным образом, следующие ноты будут выбраны в соответствии с информацией о числе переходов каждого типа, которая содержится в таблице 3.

Начнем новую мелодию с ноты *до*— с этой же ноты начинается оригинальная мелодия. Какие ноты могут следовать за начальным *до*? В последней строке таблицы показано, что в мелодии *Колыбельная* ноту, следующую за нотой *до*, можно выбрать двумя способами: один раз за ней следует *до*, второй раз *ля*. Обозначим каждый из этих переходов числом от 1 до 2 и выберем случайным образом число, лежащее в этом интервале, чтобы определить вторую ноту мелодии. Если выпадет 1, этой нотой будет *до*, если 2, то *ля*.

Повторим эти же действия для четырех возможных вариантов выбора ноты, следующей за *до: си, до, до,* и *ре*. Случайно выбранное число в интервале от 1 до 4 укажет третью ноту новой мелодии. Допустим, выпало число 2. Третьей нотой новой мелодии станет нота *до*. Эти действия повторяются требуемое число раз. Далее приведена мелодия, написанная с помощью этой техники:

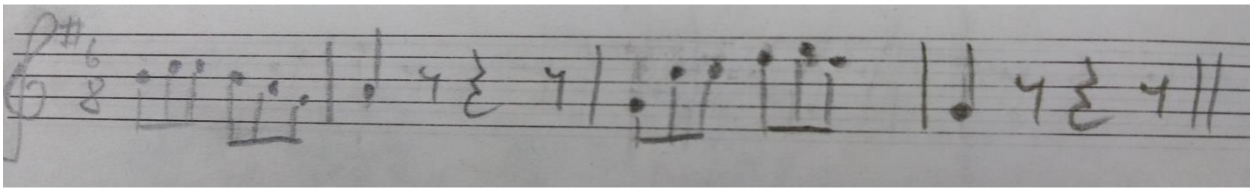


Рисунок -6. Мелодия, написанная согласно цепям Маркова.

Заключение

В математике красота и гармония ведут за собой творческую мысль так же, как в музыке. Занимаясь музыкой, человек занимается математикой. Хороший математик - это всегда хороший музыкант, потому что логика чисел, с которой постоянно общаются математики, связана с логикой развития музыкальных фраз.

Принято считать, что "музыка идет от сердца", это нечто "духовное", "чувственное", что только чистый позыв творчества способен воздействовать на сознание и настроение. Но, как мы выяснили, у музыки есть четкие математические соотношения и закономерности. Они действую как вертикально (аккорды и созвучия в данный конкретный момент времени), так и горизонтально, то есть на протяжении какого-то времени (имеют ритм, размер, развитие). Многие музыканты составляли свои произведения, опираясь на математические модели и законы.

Это значит, что рациональность и логика способны влиять на бессознательное, вызывать эмоции. Этим вопросом задавались уже древние философы, которые видели в математике закономерности, универсальные для всего мироздания, в том числе и для музыки.

Главный вывод, который я сделала: связь музыки с математикой - одна из древнейших. В самом широком смысле можно сказать, что весь мир - это музыка, потому что музыка - это математика. На подчиненность музыкальных структур математическим законам люди обратили внимание не одно тысячелетие назад. Их исследования показали, что многие вопросы, связанные с природой музыки и ее воздействием на человека могут быть описаны языком математики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Дзен. yandex.ru [Электронный ресурс]. Статья: Музыка – часть нашей жизни. URL: Режим доступа: .https://zen.yandex.ru/
(https://zen.yandex.ru/media/id/5e5e676e3db6b34676256c5b/muzyka-chast-nashei-jizni-5e79d0b3def832242c9c108d) (дата обращения 04.03.2022)
2. Великие музыкальные имена. – СПб.: Композитор, 2000. – 192с.
3. Волошинов А.В. Математика и искусство / А.В. Волошинов- Москва: Просвещение, 1992 - 335 с.
4. Музыкальная форма. – М.: Музыка, 1984. – 400с.
5. Павленков Ф. Словарь иностранных слов, вошедших в состав русского языка.- 2-еизд. — С.-Петербург: ТипографияЮ. Н. Эрлих, 1907. – 906 с.
6. G. Assayag, et al. (editores) / Mathematics and Music (2002)114-118

ПРИМЕНЕНИЕ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫХ ТОЧЕК ТРЕУГОЛЬНИКА В ИНФРАСТРУКТУРЕ ГОРОДОВ КРАСНОЯРСКОГО КРАЯ

Мирцхулава Владимир Сосоевич

Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение лицей №174, 10 класс

г. Зеленогорск

Руководитель: Меньших Лариса Львовна

Исследование свойств треугольника, связанных с замечательными точками, послужило началом для создания новой ветви элементарной математики – **"геометрии треугольника"**, одним из родоначальников которой стал Леонард Эйлер.В 1765 году Эйлер доказал, что в любом треугольнике ортоцентр, барицентр и центр описанной окружности лежат на одной прямой, названной позже "прямой Эйлера".

Большой вклад в развитие геометрии треугольника внесли математики XIX – XX веков Лемуан, Брокар и другие, в честь этих учёных названы замечательные точки, которые рассмотрены в моей работе.

В своей работе я опираюсь на достаточно известный материал – **замечательные точки треугольника** и провожу исследование траектории их движения в программе GeoGebra, что является **новизной работы.**

Проблема: практическое применение замечательных точек треугольника.

Объект исследования: замечательные точки треугольника.

Предмет исследования: замечательные точки треугольника в инфраструктуре городов Красноярского края.

Гипотезы:1) предполагаю, что траектории движения замечательных точек в треугольнике Понселе -окружности;

2) предполагаю, что исследование свойств треугольника, связанных с замечательными точками, позволит найти лучшее расположение складов сети магазинов «Магнит» и «Пятёрочка».

Цель работы: изучить замечательные точки треугольника и их траектории с помощью программы GeoGebra, исследовать их лучшее расположение.

Задачи:

1. Изучить теорию по теме **«Замечательные точки треугольника».**
2. Рассмотреть возможности динамической программы **«GeoGebra».**
3. Провести исследование о лучшем расположении замечательных точек (по сумме расстояний) в городах Красноярского краяс помощью программы «GeoGebra».
4. Пользуясь литературой и программой «GeoGebra» доказать или опровергнуть гипотезы.

Методы:

1. Изучение литературных источников.
2. Метод анализа, синтеза, обобщения и сравнения.
3. Изучение методов построения программы «GeoGebra».
4. Использование треугольников и их замечательных точек для градостроения (Если город будет разрастаться, то достраиваем его до окружности с помощью точки серединных перпендикуляров и с помощью расчётов нахожу окружность внутри окружности, которая является минимальным расстоянием от любой точки до центра).

Достигнутый уровень :Я изучил десять замечательных точек и окружность Содди, провел исследование с применением их в жизни с двумя точками (точка пересечения серединных перпендикуляров и точкой Ферма) и с окружностью Содди. Выяснил, что самой продуктивной точкой для склада магазинов «Магнит» оказалась точка Ферма (точка плоскости, сумма расстояний от которой до вершин треугольника является минимальной, при условии, что 1 угол <120°), в остальных случаях лучшей является окружность Содди, что доказывают рассчёты, приведённые в моей работе.

Перспективный план работы: изучить замечательные точки в четырехугольнике и продолжить изучение инфраструктуры г. Зеленогорска с точки зрения малого бизнеса (найти наилучшее место склада для сети четырех магазинов «Магнит» и для трёх магазинов «Пятёрочка»).

Область применения: проектирование эффективной инфраструктуры строящихся городов или районов-новостроек.

Библиографические ссылки

1. 1 А.Акопян Геометрия в картинках второе издание.
2. Wikipedia [Электронный ресурс].
3. Выгодский М.Я. Справочник по элементарной математике. Издательство М.:«Наука» 1973г.
4. Савин А.П. Энциклопедический словарь юного математика М.: «Педагогика» 1989г.
5. Глейзер Г.Д. Геометрия 7 -10 М.: «Просвещение» 1992 г.
6. Атанасян Л.С. Геометрия 7 – 9 М.: «Просвещение» 1994г.
7. Журнал «Математика в школе» №6 1998г. М.: «Школа – Пресс»
8. Газета «Математика» М, «Первое сентября» №17 2006г.
9. http://jwilson.coe.uga.edu/EMAT6680Su09/Floer/6690/Soddy%20Circles/Soddy%20Circles.html

В книге И.Ф.Шарыгина и в статье В.Дубровского и В.Сендерова «Ловушка для треугольника» («Квант» № 3 за 1998 г.) доказано, например, что центр тяжести треугольника движется по некоторой окружности. **Я решу эту задачу и исследую траектории всех замечательных точек треугольника Понселе по–новому - с помощью Программы «GeoGebra».**

Программа «GeoGebra»

GeoGebra — это бесплатная, кроссплатформенная динамическая математическая программа для всех уровней образования, включающая в себя геометрию, алгебру, таблицы, графы, статистику и арифметику, в одном удобном для использования пакете.

Траектории замечательных точек треугольника Понселе

<u>Замечательной точкой</u>я считаю такую точку в плоскости треугольника, определение которой не зависит от того, в каком порядке берутся стороны и вершины треугольника.(Приложение 1, рис. 1-3)

Возьму произвольные 4 точки на траектории движения точки Ферма. Построю углы $\angle MKL$ и $\angle MJL$, опирающиеся на одну и ту же дугу ML, найду их градусные меры $\angle MKL = \angle MJL = 38.32°$, значит, они являются вписанными и лежат на одной окружности. Значит, траектория точки движения Ферма – окружность.

Аналогично доказано, что траектории других замечательных точек треугольника Понселе - окружности, доказательство представлено мной в полном тексте работы. Выявил новое свойство: центр окружности, описанной около треугольника Понселе, совпадает с центром окружностью – траекторией замечательной точки и является точкой пересечения серединных перпендикуляров к треугольнику Понселе.

<u>Ортоцентр</u> – это точка пересечения высот остроугольного треугольника ABC. (Приложение 1, рис. 4)

<u>Инцентр</u>- точка пересечения биссектрис треугольникаABC. (Приложение 2, рис. 5)

<u>Серединные перпендикуляры</u> треугольника к его сторонам пересекаются в одной точке. (Приложение 2, рис. 6)

<u>Барицентр</u> – точка пересечения медиан, которая делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины. (Приложение 2, рис. 7)

Точка Жергонна -точка пересечения отрезков, соединяющих вершины треугольника с точками касания противоположных сторон вписанной окружностью. (Приложение 3, рис. 8)

Точка Ферма - точка плоскости, сумма расстояний от которой до вершин треугольника является минимальной. (Приложение 3, рис. 9)

Точка Брокара - одна из двух точек внутри треугольника, возникающих на пересечении отрезков, соединяющих вершины треугольника с соответствующими свободными вершинами треугольников, подобных данному треугольнику и построенных на его сторонах. (Приложение 3, рис. 10)

Точка Нагеля — точка пересечения отрезков, соединяющих вершины треугольника с точками касания противоположных сторон с соответствующими вневписанными окружностями.(Приложение 4, рис. 11)

То́чкаЛемуа́на (точка пересечения **симедиан**, точка Гребе, обозначается K или L — одна из замечательных точек треугольника). **Симедиана - чевиана треугольника**, луч которой симметричен лучу медианы относительно биссектрисы угла, проведенной из той же вершины.(Приложение 4, рис. 12)

Теорема Содди

Пусть три окружности с радиусами a,b,c касаются внешним образом. Пусть r — радиус окружности, касающейся трех данных окружностей внешним образом, а R — радиус окружности, касающейся трех данных окружностей внутренним образом. Тогда имеют место равенства $2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{r^2}\right)=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{r}\right)^2$, (Приложение 4, рис. 13)

В своей работе я опираюсь на **точку Ферма**, **точку пересечения серединных перпендикуляров** и **окружность Содди**.

Алгоритм построения (Приложение 5, рис. 14-16):

Точка пересечения серединных перпендикуляров	Точка Ферма	Окружность Содди
1) найти середину отрезка; 2) провести через эту точку прямую, перпендикулярную данному отрезку (для этого угольник прикладываем прямым углом к середине отрезка	Если все углы треугольника меньше 120 градусов, то точкой Ферма называется такая точка треугольника, сумма расстояний от которой до вершин треугольника	шаг 1: с AB в качестве наименьшей стороны постройте точку X на стороне AC так, чтобы AX = AB. Шаг 2: Постройте точку Y на стороне BC так, чтобы CY = CX. Шаг 3: Постройте среднюю точку E отрезка BY. Шаг 4: Постройте точку D на стороне AB так, чтобы BD = BE. Шаг 5: Постройте окружность (окружность a) с центром A и длиной радиуса, равной AD. Шаг 6: Постройте точку U ', построив перпендикуляр через точку A к BC. Там, где этот перпендикуляр пересекает круг a, находится точка U '. Эта точка

так, чтобы одна сторона угольника проходила через отрезок, а через другую сторону проводим прямую):	является минимальной. 1)Построить на сторонах треугольника вне него равносторонние треугольники; 2)Соединить отрезком каждую вершину треугольника с вершиной равностороннего треугольника, построенного на противоположной стороне; 3)Построить точку пересечения этих отрезков.	является ближайшей к стороне BC точкой пересечения. Шаг 7: Постройте EC ». Этот отрезок пересекает окружность a в точке U. Шаг 8: Постройте перпендикуляр AU '. Постройте P 'так, чтобы U'P' = AU '. Шаг 9: P - точка пересечения AU и EP '. Шаг 10: Постройте круг с центром в точке P и радиусом UP. Это внешний круг Содди. Шаг 1: Используя AB как наименьшую сторону, постройте точку X на стороне AC так, чтобы AX = AB. Шаг 2: Постройте точку Y на стороне BC так, чтобы CY = CX. Шаг 3: Постройте среднюю точку E отрезка BY. Шаг 4: Постройте точку D на стороне AB так, чтобы BD = BE. Шаг 5: Постройте окружность (окружность a) с центром A и длиной радиуса, равной AD. Шаг 6: Постройте точку U ”, построив перпендикуляр через точку A к BC. Там, где этот перпендикуляр пересекает круг a, находится точка U ”. Это точка пересечения, наиболее удаленная от BC. Шаг 7: Постройте EC ». Этот отрезок пересекает окружность a в точке U. Шаг 8: Постройте перпендикуляр AU '. Постройте P 'так, чтобы U'P' = AU '. Шаг 9: Постройте круг с центром в точке A и радиусом AP '. Точка P »является пересечением этой окружности и прямой AU '. Шаг 10: Постройте точку F как точку касания окружностей B и C. Шаг 11: Постройте перпендикулярную линию через точку B к стороне AC. Пересечение перпендикулярной прямой и окружности b, наиболее удаленной от стороны AC, является точкой V ”. Шаг 12: Постройте окружность с центром V ”и радиусом V” B. Точка пересечения этой окружности и прямой V ”B является точкой Q”. Шаг 13: Постройте линию FQ »и линию EP». Пересечение этих двух линий является центром внутреннего круга Содди. Обозначьте эту точку S. Шаг 14: Постройте точку R как точку пересечения окружности B и линии FQ ». Шаг 15 Постройте круг с центром в точке S и радиусом RS. Это внутренний круг Содди.

Вывод: траектории движения всех замечательных точек – окружности (доказано по признаку окружности).

Применение замечательных точек треугольника для улучшения инфраструктура города Зеленогорска

Исследование в треугольниках(в зависимости от углов)

Вид треугольника	Нахождение суммы расстояний от точки пересечения серединных перпендикуляров до вершин треугольника	Нахождение суммы расстояний от точки Ферма до вершин треугольника
Прямоугольный треугольник	P=2,83 * 3 =8,49	P=3,27+3,27+1,2=7,74
Остроугольный треугольник	P=3,54 * 3 = 10,62	P=2,34+3,94+4,03=10,31
Тупоугольный треугольник	P=2,28*3=6,84	P=1,28+3,1+2,06=6,44

Сравнение расстояний от точки пересечения серединных перпендикуляров до вершин треугольника и от точки Ферма до вершин треугольника в инфраструктуре городов Красноярского края

Я решил найти лучшее расположение (по сумме расстояний от точки до вершин треугольника) предполагаемого места для склада сети магазинов магнит. Я прекрасно понимаю, что в моём городе такой склад не построить, поэтому я решил провести своё исследование для 3 городов (Красноярск, Железногорск, Зеленогорск), после чего соединил их в треугольник и построил: точку Ферма и точку пересечения серединных перпендикуляров, точку Ферма и окружность Содди.

Точка пересечения серединных перпендикуляров	**Точка Ферма**
(Приложение 5, рис. 17) (Магнит)33	(Приложение 6, рис. 18) (Магнит)28.2
(Приложение 6, рис. 19) (Пятёрочка)23.01	(Приложение 7, рис. 20) (Пятёрочка)22.87

Траектория движения Точки Ферма для складов сети магазинов «Магнит» и «Пятёрочка»

(Приложение 7, рис. 21) **«Магнит»**	(Приложение 7, рис. 22)

	«Пятёрочка»

Сравнение расстояния от городов (Зеленогорска, Красноярска и Железногорска) до распределительного центра сети магазинов «Магнит» и предполагаемого распределительного центра сети магазинов «Магнит»

Приложение 8, рис. 23

РЦ «Магнит»	Предполагаемое место для РЦ «Магнит»
19.4+62.4+125=206.8км	5.88+65.1+47.7=118.68км

Исходя из расчётов, выполненных мной, предполагаемое место для РЦ «Магнит» находится ближе к городам: Зеленогорск, Красноярск, Железногорск.

(Приложение 8, рис. 24)**Точка Ферма**	(Приложение 8, рис. 25) **Окружность Содди**
6,46+ 0,99 +8,55 = 16	0,71 + 7,83+ 5,75 = 14,29

Выводы:

1. Я изучил десять замечательных точек треугольника.
2. Рассмотрел возможности динамической программы «GeoGebra», которая позволяет в сравнении с начертательной геометрией быстро чертить, вносить коррекцию в чертежи.
3. Выяснил, что траекториями этих девяти замечательных точек треугольника Понселе являются окружности.
4. Провел исследование с точками: точкой пересечения серединных перпендикуляров - центр описанной окружности и точкой Ферма, выяснил, что самой продуктивной точкой (для треугольника, у которого 1 из углов меньше 120 градусов) оказалась точка Ферма (точка плоскости, сумма расстояний от которой до вершин треугольника является минимальной), что доказывают расчёты, приведённые в моей работе.
5. Я провел исследование с треугольником, у которого 1 из углов меньше 120 градусов: сравнил Точку Ферма с Окружностью Содди и выяснил, что центр

окружности Содди - самая продуктивная точка (по сумме минимальных расстояний).

6. Выяснил, что наилучшее расположение склада для сети магазинов «Магнит» и «Пятёрочка» находится около Железногорска.
7. Гипотеза подтвердилась! Цель моей работы достигнута!

«КАКОЙ ДОМ ЛУЧШЕ?»

Половникова Виктория

Муниципальное автономное нетиповое общеобразовательное учреждение «Гимназия №2», 11 класс

г. Мариинск

Руководитель: Козловская Наталья Александровна, учитель математики

При строительстве любого дома люди всегда задаются вопросом: «Какой дом лучше?». «Лучше тот, что теплее» – скажут одни, «лучше тот, что красивее или комфортнее» - скажут другие. Но есть ли способ определить – это «лучше»? Мне стало интересно найти составляющие определения «лучший» дом. Я попробую ответить на этот вопрос с точки зрения геометрии и психологии. В прошлом учебном году я представляла исследовательскую работу по теме "Геометрическое определение коэффициента комфортности жилья", в которой было выяснено, что наиболее комфортным жильем будет то, в форме которого находится обтекаемое тело.

Цель исследования:

выяснить, что означает «комфортность жилья» с точки зрения психологии, какие коэффициенты, помимо геометрического, еще влияют на комфортность жилья.

Задачи:

- изучить вопрос: что такое комфортная среда с точки зрения психологии и как застройщики создают такую среду в современных новостройках;
- провести анкетирование на понимание понятия «комфортное жилье»;
- выяснить что еще влияет на комфортность жилья помимо геометрического определения коэффициента комфортности;

- составить справочник национальных жилищ разных народов мира;
- спроектировать комфортный дом

Мой дом – моя крепость.

Задумывались ли вы над смыслом выражения «Мой дом – моя крепость». Мой дом — это, то место на земле, где я могу и должен чувствовать себя в полной безопасности. Задумывались ли вы над тем, где проводите наибольшую часть своего времени? Наверное, нет. А ответ необычайно прост: в своем жилище - в своем доме, своей квартире.

Много тысяч лет назад человек еще не умел строить дома. Нашего далекого предка окружали, леса, горы, пустыни. Но природа дома не строит, а как использовать деревья, камни или глину он еще не знал. Он был очень голоден, и все время думал, где бы ему добыть еду. А еще первобытному человеку было холодно, ведь он не имел меховой шкуры в отличие от животных. Кроме того, нашему далекому предку со всех сторон угрожали хищные звери. Трудно приходилось человеку без дома! Волей-неволей он стал искать, где бы ему спрятаться. Первой «крепостью» человека стала пещера. Заглянув в пещеру, человек понял, что это хорошее место, чтобы укрыться и от непогоды, и от опасных диких зверей. Очаг обогревал жилище, на огне можно было приготовить пищу. Так пещера стала для нашего далекого предка первым домом. Пещера долго служила человеку укрытием от холода и хищников, но все же, была ненадежным жилищем. Проходили столетия и тысячелетия. В процессе эволюции, вместо пещер и шалашей, человек, в зависимости от особенности климата создавал теплые или холодные, временные или постоянные и различной формы жилища. Сначала это были одноэтажные, а потом человек научился строить и многоэтажные дома.

Приятно находиться в помещении, когда в не свежий воздух, тепло, светло, нормальная относительная влажность помещений и тишина, отсутствие шума. Когда наши доисторические предки искали себе убежище, которое впоследствии стали называть домом, они использовали природные ресурсы вокруг себя, как средство для укрытия. Древние люди жили в пещерах. Но человек – самое гениальное творение природы. И со времени он научился строить себе обители. На протяжении веков людям приходилось жить под землей, на деревьях и под скалами. Со временем у человека стали развиваться навыки, он начал использовать при строительстве своего дома вспомогательные средства: дерево, металл, кирпич, камень, лед и шкуры животных.

В наши дни, в большинстве случаев, дома строят кирпичные и бетонные, за некоторым исключением, например, бытовки, быстровозводимые здания и деревянные навесы. Однако есть в мире некоторые цивилизации, которые до сих пор живут в жилищах, используемых их предками сотни лет назад.

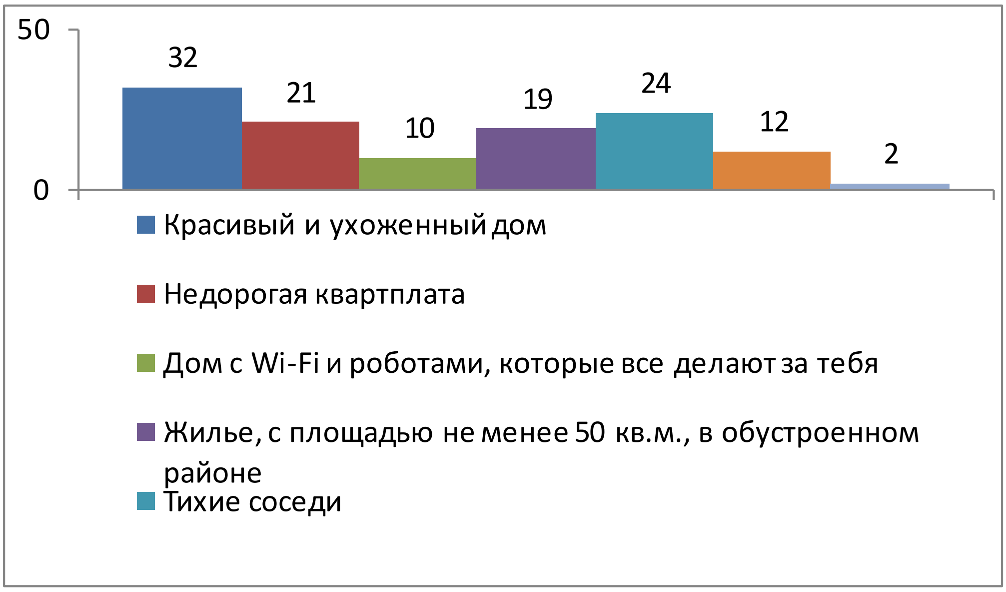
Комфортное жилье.

Что означает понятие «Комфортное жилье»? (анкетирование учащихся)

Что такое комфорт? Обратимся к словарям.

Во всех определениях красной линий проходит, что комфорт – это благоприятные внешние и внутренние условия среды обитания.

Человек с его неуёмной фантазией создает жилища разнообразной формы, в которых, кажется, невозможно жить, хотя, как говорится: на вкус и цвет товарищей нет. Очевидно, что комфорт каждый ощущает и определяет по-своему.



Учащимся предлагалось выбрать 2-3 предложения из предложенных, ответив на вопрос, что в их понимании означает комфортное жилье. Были получены следующие результаты:

«Комфортная среда» с точки зрения психологии

Все говорят о физическом комфорте, эргономике в новостройках, но часто забывают о психологическом комфорте. Безопасность, дворы без машин, световая и цветовая гамма, выбор материалов для интерьеров общественных пространств в жилых комплексах, архитектура и планировка территории — это базовые с точки зрения психологии вещи, которые порождают положительные эмоции и создают комфорт. В США и западных странах на это давно обратили внимание девелоперы, и при проектировании и разработке планировок жилых кварталов они обращаются за консультациями к психологам. В России застройщики тоже используют западные и собственные наработки при создании не только физического, но и психологического комфорта для жителей. Чаще такие проекты появляются в мегаполисах с высоко конкурентным рынком жилья и в новостройках более дорогих сегментов.

На комфорт для жизни влияют сразу несколько факторов: чувство безопасности, обилие пространства и света, цветовые решения, благоустройство и наличие зелени и деревьев во дворе…

Пространство и свет

С точки зрения психологического комфорта базовые вещи — это пространство и свет. Людям неприятно находиться в небольших комнатах с низкими потолками, говорит психолог частной практики Арина Ковина. По ее словам, психологический комфорт — это воздух и та самая пресловутая инсоляция, то есть солнечные лучи должны попадать в помещение, но не давить в жару излишней духотой. Пространство может быть поделено на зоны перегородками и спроектировано так, чтобы не было длинных узких коридоров, как в типовых домах советского периода. Поэтому входные группы стараются делать максимально просторными, двери — стеклянными, вставлять много светлых и ярких орнаментов, которые визуально расширяют помещение. Большое влияние на психологическое благополучие человека оказывает освещение.

В некоторых проектах применяет технологию второго света, благодаря которой солнечные лучи распределяются равномерно, а между уровнями нет глухого перекрытия. Другой пример — зенитные окна, они используются на верхних этажах и представляют собой застекленный проем в потолке, который обеспечивает большее проникновение солнечного света.

Баланс безопасности и открытости

Безусловно, безопасность – одно из базовых требований к жилью. Но при этом оно должно выполняться таким образом, чтобы не нарушать эстетический и функциональный баланс, не делать дом похожим на осажденную крепость. Избыточные ограждения делают пространство закрытым и недружелюбным, а сами жители вместо безопасности начинают чувствовать дискомфорт и отчуждённость от внешнего мира.

С точки зрения психологии двор без машин создает ощущение безопасности, потому что автомобиль ассоциируется с движением, скоростью и представляет потенциальную угрозу жизни. Отсутствие парковки у дома позволяет расслабиться, вызывает доверие к жилому пространству и ощущение безопасности.

Сегодня существуют разные решения и технологии: видеонаблюдение, магнитные идентификационные карты и ключи. Чтобы снизить визуальный эффект разграничения, решетки и ограждения можно делать прозрачными, таким образом, оставляя дом открытым для обзора.

Озеленение

Переоценить роль зеленых насаждений в восприятии пространства сложно – мало какой архитектурный изыск может сравниться по красоте и разнообразию с грамотно спланированной зеленой зоной. Сегодня в мире набирает обороты тренд биофилического дизайна – вплетения живой природы в жилые и офисные пространства.

Озеленению начинают уделять все больше внимания, как горизонтальному, так и вертикальному. Так, основательница архитектурного бюро JK LabArchitects Жанна Киселева называет оптимальной формулу, когда застраивается 30% выделенного участка, а вся остальная площадь отводится под зоны отдыха и совместного пользования и выполняет рекреационные функции.

Согласно действующим государственным строительным нормам (ДБН), пространство вокруг жилых комплексов должно иметь пояс зеленых насаждений не менее чем пятиметровой ширины, парковки также требуют полутора метров зелени вокруг. Кроме того, после окончания строительства застройщик должен высадить столько же или больше зеленых насаждений, сколько было уничтожено во время строительства.

Цветовая гамма

Цветовая гамма, признанная психологами наиболее оптимальной для жизни, — это любые природные цвета. Основу любого успокаивающего пейзажа составляют все оттенки зеленого, синий и голубой, а также желтый и коричневый. При этом яркие пятна оранжевых и ярко-желтых оттенков считаются оптимистичными и повышающими настроение, но только в разумных пределах (как советуют психологи).

Детские площадки и зоны отдыха

Ещё одна тенденция для создания полноценной психологической среды — уход от дворов, предназначенных только для детей. Разумеется, детским площадкам по-прежнему отдается приоритет, но застройщики стали делать зоны отдыха для разных возрастных групп, бездетных жителей, а также скверы и зоны для барбекю и шашлыков.

Благоустройство и городская среда

С точки зрения психологии еще одна сложность в мегаполисах — это нависающие высотные дома, рядом с которыми человек чувствует себя маленьким, эффект небоскребов. Эту проблему обычно решают с помощью корпусов разной этажности и яркого оформления фасадов.

Малая этажность

Наши города все больше обрастают многоэтажными зданиями. Но значит ли это перемены к лучшему?

Уплотненная высотная застройка не добавляет городу ни эстетичности, ни комфорта. Проживание на высоте более 14 метров делает невозможным вербальный и визуальный контакт с уличной средой – то есть, к примеру, отпустить ребенка поиграть во дворе и следить за ним из окна уже затруднительно.

Малоэтажные дома создают больше возможностей для интеграции в городскую жизнь и местное сообщество, лучше вписываются в исторический архитектурный ландшафт и даже создают предпосылки к увеличению физической активности – в эпоху сидячей работы лишний подъем по лестнице уже засчитывается как зарядка.

«Мое комфортное жилье»

Для того чтобы спроектировать свое комфортное жилье, я воспользовалась программой для 3D-моделирования «Blender». В ней я воспользовалась такими фигурами, как: сфера, цилиндр, конус, тор, капсула, куб (метасфера), из которых получила своеобразное жилье, состоящее из веранды, коридора-перехода, дома.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Все вокруг математика! Все вокруг геометрия! И в самом деле — всюду геометрия. Современная цивилизация — это Цивилизация Математики, Геометрии. С помощью геометрии в данной работе исследуется степень комфортности жилья в зависимости от его геометрической формы. Как известно сегодня дом это совсем не роскошь, а настоящая необходимость, причем порой довольно острая. При этом современное жилье с каждым годом претерпевает все более ощутимые изменения, совершенствуясь в своей комплектации и получая все новые и новые возможности.

В заключение хочется сказать, что для каждого человека комфорт определяется по их предпочтениям, желаниям и визуализации той среды, в которой они собираются жить, но, если прислушаться к некоторым словам и советам, представленным в данной работе, то свой комфорт можно немного, но сделать больше. Так какой же дом лучше? Думаю, для каждого человека лучше тот дом, в котором он вырос или живет сейчас. А я в своей работе попыталась сделать маленький шаг навстречу возможности проектировать и строить эти дома уютнее и комфортнее.

СИМЕДИАНА

Романов Иван

Федеральное государственное казенное общеобразовательное учреждение «Кемеровское президентское кадетское училище», 9 класс
г. Кемерово

Руководитель: Борздун Ольга Владимировна, преподаватель математики

В геометрии существует множество различных чевиан, самые известные- это медиана, биссектриса и высота. Но вы хоть раз слышали о симедиане? Симедиана - это чевиана, с помощью которой можно намного быстрее решать сложные задачи из курса математики.

Гипотеза: изучение нескольких свойств одного геометрического обьекта позволит легче и быстрее решать задачи в курсе геометрии.

Объект исследования: симедиана.

Предмет исследования: свойства симедианы, а также задачи с ее применением.

Цель работы: Изучение свойств симедианы, их применение при решении задач.

Задачи данной работы:

1. Познакомиться со свойствами данного геометрического объекта.
2. Рассмотреть несколько способов доказательств данных свойств симедианы.
3. Подобрать задачи, использующие в решение симедиану.
4. Освоить математическую программу Geogebra.

Актуальность темы:

1. Данная тема является дополнением изученных в курсе геометрии свойств.

2. Применение опыта решения геометрических задач с использованием симедианы помогает повысить уровень логической культуры.

3. Изучение данной темы поможет подготовиться к успешному участию в математических конкурсах и олимпиадах.

Чевиана — это любой отрезок в треугольнике, один конец которого является вершиной треугольника, а другой конец лежит на противоположной вершине стороне.

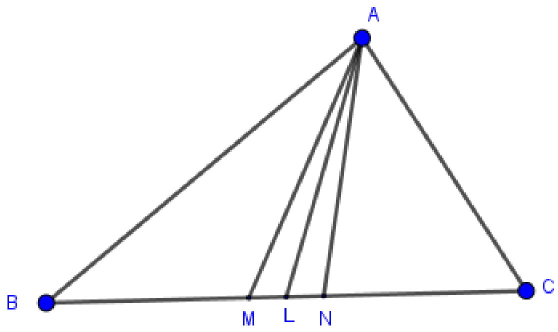
Симедиана – чевиана, симметричная медиане, относительно биссектрисы того же угла треугольника.

Симедиана – чевиана, делящая противоположную сторону в отношении квадратов прилежащих сторон. [3]

Основная задача: прямая, содержащая симедиану треугольника проходит через точку пересечения касательных из двух его вершин к описанной окружности треугольника.

Различные леммы симедианы

Первая лемма:



В треугольнике проведен отрезок, антипараллельный одной из сторон. Тогда прямые, содержащие медиану большого и симедиану маленького треугольника, совпадают.

Вторая лемма:

Если во вписанном четырехугольнике одна диагональ является симедианой, то он гармонический.

Гармонический четырехугольник — вписанный в окружность четырехугольник, у которого произведения его противоположных сторон равны.

Свойства симедианы и их доказательства

Первое свойство: Диагонали гармонического четырехугольника являются симедианами.

Второе свойство: В неравнобедренном треугольнике одна из симедиан совпадает с высотой тогда и только тогда, когда этот треугольник – прямоугольный.

Третье свойство: Если в остроугольном треугольнике есть такая точка (возьмем ее за X), которая лежит внутри его так, что $\angle BAX = \angle AXC$, $\angle CAX = \angle ABX$, то точка X лежит на симедиане.

Четвертое свойство: Прямая AD содержит симедиану треугольника ABC тогда и только тогда, когда четырехугольник ABCD гармонический.

Пятое свойство: Если треугольник вписан в окружность, то точка пересечения касательных, проведенных из двух вершин треугольника, лежит на симедиане угла третьей вершины.

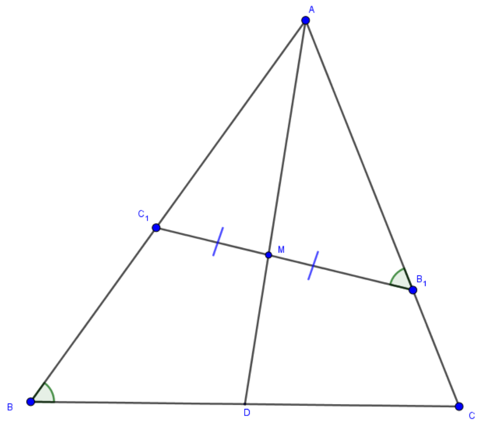
Задачи и их решения

Задача №1: [1, с.119]

В треугольнике ABC проведен отрезок B_1C_1, антипараллельный стороне BC, с концами на сторонах AB и AC соответственно. Докажите, что отрезок AS ($S \in [BC]$) является симедианой треугольника тогда и только тогда, когда он, пересекая отрезок B_1C_1, делит его пополам.

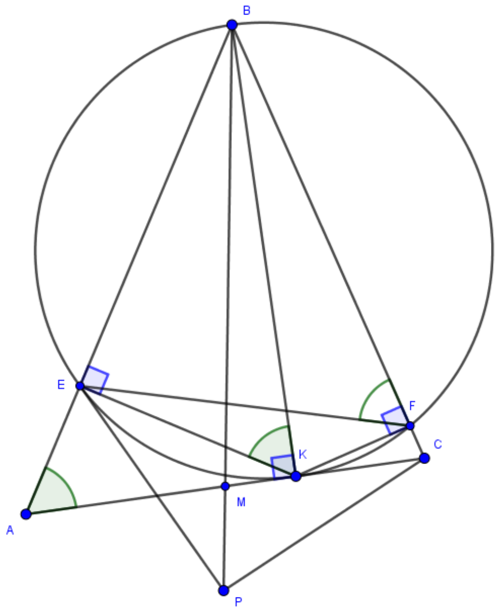
Решение:

Рассмотрим симметрию относительно биссектрисы угла A. Образы точек B_1 и C_1 принадлежат прямым AB и AC соответственно, причем полученный отрезок параллелен прямой BC. Следовательно, его середина лежит на медиане треугольника ABC тогда и только тогда, когда AS – симедиана (по определению).



Задача №2: [9, ВсОШ, 1995г, закл.этап, 10 класс]

В остроугольном треугольнике ABC на высоте BK, как на диаметре, построена окружность *S*, пересекающая стороны AB и BC в точках E и F соответственно. К окружности S в точках E и F проведены касательные. Докажите, что их точка пересечения лежит на прямой, содержащей медиану треугольника ABC, проведённую из вершины B.



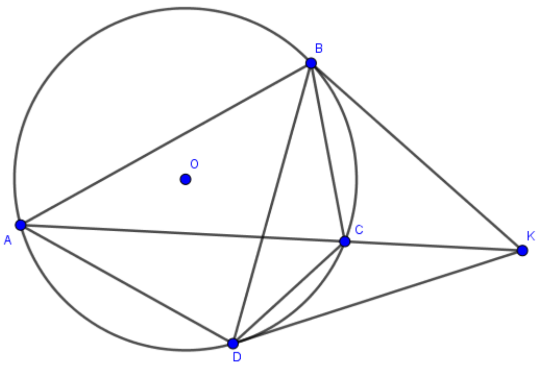
Решение:

Из основной задачи следует, что PB – симедиана в треугольнике BEF. Тогда достаточно доказать, что EF антипараллель к AC (см. задачу №1).

Действительно, ∠BAK = ∠EKB (это острые углы в двух прямоугольных треугольниках BAK иBKA с общим углом ABK), ∠EFB = ∠EKB (четырехугольник BEKF – вписанный), значит ∠BAC = ∠EFB, что и требовалось.

Задача №3:[10]

Касательная в точке B к описанной окружности S треугольника ABC пересекает прямую AC в точке K. Из точки K проведена вторая касательная KD к окружности S. Докажите, что BD содержит симедиану треугольника ABC.

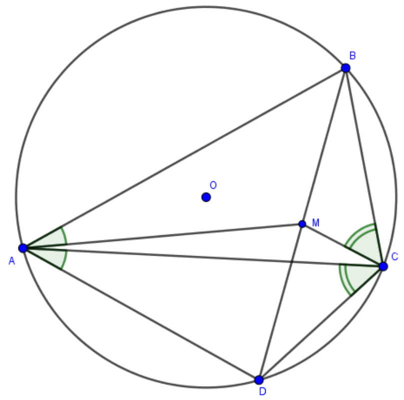


Решение:

В четырехугольнике ABCD, AC – симедиана треугольника ADB (из основной задачи). Таким образом, по лемме, BD – симедиана в треугольнике ABC.

Задача №4:[11, олимпиада по геометрии]Прямые, симметричные диагонали AC четырехугольника ABCD относительно биссектрис углов A и C, проходят через середину диагонали BD. Докажите, что прямые, симметричные диагонали BD относительно биссектрис углов B и D, проходят через середину диагонали AC.

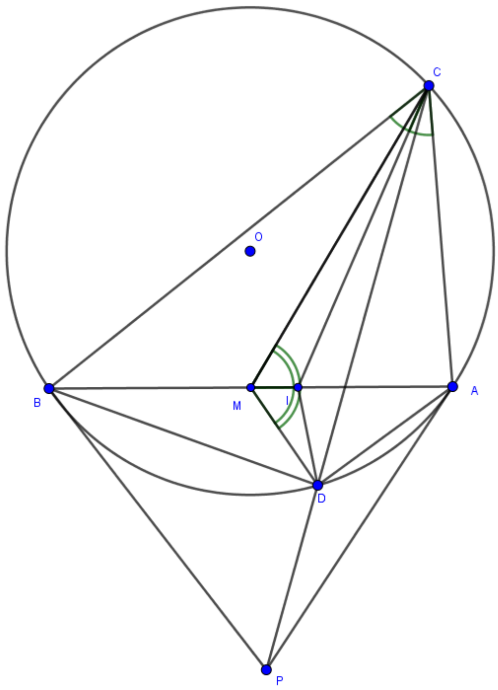
Решение:



Если прямые AM и CM, симметричные AC относительно биссектрис углов, являются медианами, значит AC – симедиана в треугольниках ABD и BCD. Таким образом, задача эквивалентна предыдущей. Значит BD – симедиана в треугольниках ABC и ACD, следовательно прямые, симметричные ей относительно биссектрис углов, будут содержать медианы в треугольниках ABC и ACD, то есть будут пересекать AC в середине.

Задача №5:[3]

CI – биссектриса угла BCA треугольника ABC. CD – симедиана треугольника ABC. Точка D – пересечение симедианы с описанной окружностью. Докажите, что DI – биссектриса угла BDA.

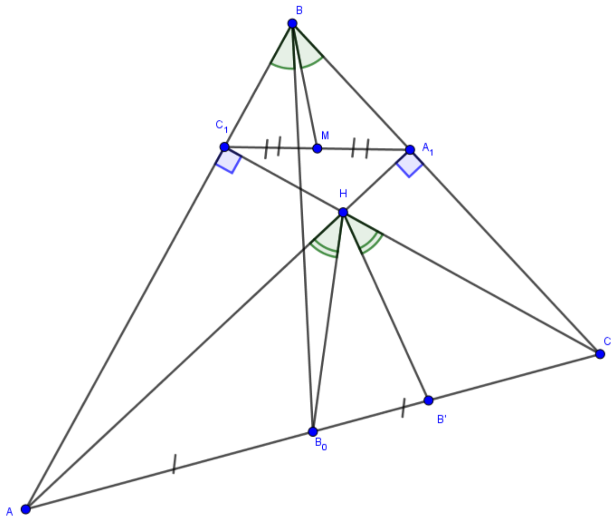


Решение:

Заметим, что четырехугольник ACBD – гармонический. Из определения следует, что AC · BD = BC · DA, то есть $\frac{BC}{CA} = \frac{BD}{DA}$. Таким образом, биссектрисы противолежащих углов D и C делят диагональ AB в одинаковом отношении, следовательно, пересекаются на этой диагонали.

Задача №6: [7]

Высоты AA_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Точка B_0 – середина стороны AC. Докажите, что точка пересечения прямых, симметричных BB_0 и HB_0 относительно биссектрис углов ABC и AHC соответственно, лежит на прямой A_1C_1.



Решение:

Заметим, что A_1C_1 – отрезок, антипараллельный BC. Из задачи №1 следует, что прямая, симметричная BB_0 относительно BL проходит через середину A_1C_1 (точку M). Аналогично, прямая, симметричная HB_0, относительно биссектрисы угла AHC, проходит через точку M.

Заключение

Изучение нескольких свойств одного геометрического обьекта позволило быстрее и легче решать задачи из различных олимпиад.

В ходе выполнения работы мы познакомились: с различными понятиями симедианы, рассмотрели несколько свойств данной чевианы, познакомились с леммами данного геометрического объекта, подобрали задачи, использующие в решение симедиану, освоили математическую программу Geogebra.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Прасолов В. В. «Задачи по планиметрии», МЦНМО, 2006
2. http://geometry.ru/articles/symmedian_blinkov.pdf
3. Olympiads.mccme.ru/ustn/
4. https://www.problems.ru/view_problem_details_new.php?id=108191
5. https://www.problems.ru/view_problem_details_new.php?id=56983
6. https://www.problems.ru/view_problem_details_new.php?id=111714

ИЗУЧЕНИЕ МЕТОДИКИ ОКРУГЛЕНИЯ ЧИСЕЛ ПРИ ОБРАБОТКЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ХИМИЧЕСКИХ СОЕДИНЕНИЙ

Колбасенко Ксения Павловна

Краевое государственное автономное профессиональное образовательное учреждение «Ачинский техникум нефти и газа имени Е.А. Демьяненко», 2 курс

г.Ачинск

Руководитель: Плотникова Елена Антоновна

В рамках своей специальности 18.02.12 Технология аналитического контроля химических соединений, в профессиональной деятельности мы выполняем лабораторные работы, экспериментальные исследования, результаты которых принято записывать в виде приближенного числа. Так же при подготовке к чемпионату профессионального мастерства «Молодые профессионалы» WorldSkills по компетенции «Лабораторный химический анализ» выполняем задания на округление результата вычисления согласно национального стандарта E29-13.

Целью данной работы является изучение основных методов обработки результатов, общепринятых методов округления данных, методики округления чисел согласно национального стандарта E29-13, на примере задач химических соединений.

Каждое число в десятичной записи состоит из большого количества цифр, поэтому чрезвычайно важно провести корректное округление полученного результата. При этом важно исключить в записи те цифры, которые являются избыточными и не несут никакой информации.

Рассмотрим несколько общепринятых методов округления данных.

Абсолютный метод используется для выражения одного и того же абсолютного предела в целях определения соответствия техническим условиям, при этом наблюдаемое или рассчитанное значение необходимо сравнивать непосредственно с этим заданным пределом[1]. Таким образом, любое отклонение, даже небольшое, за допускаемый предел означает несоответствие техническим условиям.

Если применяется абсолютный метод, то наблюдаемое или рассчитанное значение округлять не надо, а надо сравнивать его непосредственно с заданным предельным значением. Соответствие или несоответствие техническим условиям основано на этом сравнении.

Метод округления используется для выражения того, что с целью определения соответствия техническим условиям наблюдаемое или рассчитанное значение необходимо округлить с точностью до 0,1, 0,01 или 0,001, и затем сравнить с заданным пределом.

Если применяется метод округления, то наблюдаемое или рассчитанное значение необходимо округлить в соответствии с методикой, рассмотренной ниже, с точностью до ближайшей единицы в установленном стандарте разряда чисел.

Рассмотрим методику округления согласно национального стандарта E29-13 «Стандартная методика использования значащих цифр в данных по испытаниям для определения соответствия техническим условиям».

Если цифра, следующая за последним разрядом, который сохраняется, меньше 5, то цифру в последнем остающемся разряде оставляют без изменения. Если цифра, следующая за последним разрядом, который сохраняется, больше 5, то цифру в последнем остающемся разряде увеличивают на 1. Если цифра, следующая за последним разрядом, который сохраняется, равна 5 и после нее нет цифр или только нули, то цифру в последнем остающимся разряде, если она нечетная, увеличивают на 1 и оставляют без изменений, если она четная. Увеличивают на 1 цифру в последнем остающемся разряде, если за 5 есть нулевые цифры.

Округленное значение следует получать в один этап путем прямого округления наиболее точного имеющегося значения, а не путем двух или более последовательных округлений. Например, 89490 при округлении до 1000 будет 89000; будет неправильным округлить сначала до 100, получив 89500 и затем до 1000, получив 90000.

В некоторых методах испытаний может встречаться требование округлить значение с точностью до 0,02, 0,025, 0,3 и т.д. В таких случаях можно использовать следующую процедуру для округления любого интервала:

1. Делят результат на требуемый интервал округления;
2. Округляют результат, с точностью до ближайшего целого числа, следуя условиям описанных выше, где это применимо;
3. Умножают результат на требуемый интервал округления.[1]

Например, при округлении 0,07 до ближайших 0,02, деление 0,07 на 0,02 дает значение 3,5. Округление этого значения до ближайшего целого числа дает значение 4. Умножение 4 на 0,02 дает 0,008. При округлении 0,09 до ближайших 0,02, деление 0,09 на 0,02 дает значение 4,5. Округление этого значения до ближайшего целого числа дает значение 4. Умножение 4 на 0, 02 дает 0,08.

В стандартеWorldSkills по компетенции «Лабораторный химический анализ» имеется модуль «Приготовление растворов для кислотно-основного титрования». В рамках этого модуля надо провести расчет необходимого объема концентрированного раствора кислоты или щелочи для приготовления разбавленного раствора, выполнить обработку полученных результатов. Коэффициент поправки вычисляют с точностью до четвертого десятичного знака по каждой навеске установочного вещества, затем результат необходимо округлить до 0,003.[2]

Допустим, в процессе решения задачи получили среднее значение коэффициента поправки раствора соляной кислоты 0,7934. Теперь его надо округлить до 0,003. Согласно алгоритма, описанного выше, получаем коэффициент поправки равный 0,792.

При округлении результатов испытаний можно избежать потери информации из-за низкой разрешающей способности измерительного оборудования. Любой подход к сохранению необходимых значащих цифр предусматривает некоторую потерю информации; поэтому степень округления следует выбирать тщательно, учитывая как запланированное, так и потенциальное использование данных. Число значащих цифр должно быть, в первую очередь, адекватным для сравнения с указанными пределами. Для некоторых конкретных целей, таких, как вычисление близких по значению разности измерений, а также для некоторых статистических расчетов можно рекомендовать представление данных с увеличенным числом значащих цифр [1].

При записи непосредственных измерений, таких как показания, по отметкам на бюретке, линейке или круговой шкале, следует записать все цифры, которые известны точно, плюс одна цифра, которая может быть неопределенной в результате оценки. Например, если бюретка градуирована в единицах 0,1 мл, то наблюдаемые значения следует записать как 9,76 мл, если оно наблюдается между метками 9,7 и 9,8 на бюретке и оценивается примерно в шесть десятых между этими метками.

Рассмотренные методики предназначены в помощь различным техническим комитетам для применения единых методов указания числа цифр, которые считаются значащими в пределах, представленных техническими условиями, например, установленных максимальных или минимальных значений.

В данной работе определены методы, которые позволяют разъяснить смысл пределов, установленных техническими условиями, с которыми сравниваются наблюдаемые значения или рассчитанные результаты испытания при определении соответствиятехническим условиям. При применении данных методик к конкретным материалам важно указать метод, предполагаемый для применения. Выбор метода зависит от действующей методики конкретной отрасли промышленности или техники, и поэтому должен быть определен в первую очередь.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 ASTM E29-13 (2019) «Стандартная методика использования значащих цифр в данных по испытаниям для определения соответствия техническим условиям».

2 Рабочая тетрадь дополнительной профессиональной программы повышения квалификации преподавателей (мастеров производственного обучения) «Практика и методика реализации образовательных программ среднего профессионального образования с учетом спецификации стандартов Ворлдскиллс по компетенции «Лабораторный химический анализ». Сост. Проценко Р.С., Кальный Д.Б. и др. Новосибирск, 2019.

ПРИМЕНЕНИЕ ОБЛАСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБЛАСТИ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ, НЕРАВЕНСТВ И ИХ СИСТЕМ

Коваленко Софья

Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение лицей при ТПУ, 10 класс

г. Томск

Руководитель: Киреенко Светлана Григорьевна

В школьной программе рассматривается несколько стандартных приемов решения уравнений и неравенств, а также их систем. Готовясь к различным олимпиадам и экзаменам, ученики замечают, что решения такими способами некоторых примеров получаются слишком громоздкими и требуют большого количества времени. Решение заданий с параметром иногда и вовсе невозможно без знания нетривиальных подходов. Именно поэтому я решила с помощью специальной литературы изучить способы решения уравнений и неравенств с использованием функциональных методов, в частности, с применением области определения и области значений функций. Так как такой подход к решению задач редко упоминается в школьной программе, но при этом может сэкономить время и силы на ЕГЭ или на олимпиадах. Тема моего проекта будет, несомненно, полезна для школьников, в особенности для учеников выпускных классов.

Цель: популяризация применения нетрадиционных методов решения уравнений, неравенств и их систем

Задачи:

1. Изучить теоретический материал по теме «Область определения и область значений функций».
2. Научиться распознавать и решать задачи, в которых является целесообразным применение ОДЗ и ограниченности функций.
3. Подобрать задачи из литературы, интернета и классифицировать их по способам решения.
4. Самостоятельно составить несколько подобных задач.
5. Создать руководство по решению задач на применение ОДЗ и ограниченности функций.

Напомним, что функцией называется такая зависимость между двумя множествами, при которой каждому элементу одного множества ставится в соответствие единственный элемент другого множества. Первое множество называется областью определения функции, а второе — областью значений функции.

Пересечение областей определения функций, входящих в уравнение, неравенство или систему, называют областью допустимых значений переменной (ОДЗ) для данного уравнения, неравенства или системы соответственно.

Определение. Функцию $f(x)$ называют ограниченной (ограниченной сверху, ограниченной снизу), если ее область значений E(f) ограничена (ограничена сверху, ограничена снизу).

Утверждение 1. Если для всех x из некоторого промежутка X справедливы неравенства $f(x) > A$ и $g(x) < A$, где A — некоторое число, то на множестве X уравнение $f(x) = g(x)$ и неравенство $f(x) < g(x)$ решений не имеют.

Утверждение 2. Если для всех x из некоторого промежутка X справедливы неравенства $f(x) \geq A$ и $g(x) \leq A$, где A — некоторое число, то на множестве X уравнение $f(x) = g(x)$ и неравенство $f(x) \leq g(x)$ равносильны системе уравнений

$$\begin{cases} f(x) = A, \\ g(x) = A \end{cases}$$

Утверждение 3. Для того чтобы неравенство $f(x) \geq g(x)$ на множестве X имело хотя бы одно решение, необходимо (но не достаточно), чтобы выполнялось условие $\max\limits_{x \in X} f(x) \geq \min\limits_{x \in X} g(x)$.

Утверждение 4. Если для всех x из множества X справедливы неравенства $|f(x)| \geq A$ и $|g(x)| \geq B$ ($|f(x)| \leq A$ и $|g(x)| \leq B$), где A и B — положительные числа, то на X уравнение $f(x) \cdot g(x) = AB$ равносильно совокупности систем уравнений

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) = A, \\ g(x) = B, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) = -A, \\ g(x) = -B. \end{cases} \end{array}\right.$$

Рассмотрим ряд примеров на применение области определения и области значений функции.

Пример 1. Решите неравенство $(x-3)^2(x-8) < \sqrt{6-x} + \sqrt{x-1}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} 6 - x \geq 0, \\ x - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 6, \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [1; 6].$

Рассмотрим, какие значения принимают функции в левой и правой частях неравенства:

$\sqrt{6-x} + \sqrt{x-1} > 0$

$(x-8) < 0 \Rightarrow (x-3)^2(x-8) \leq 0$

Значит, на ОДЗ левая часть уравнения всегда меньше правой.

Ответ: $x \in [1; 6]$.

Пример 2. Решите уравнение $cosx \cdot cos5x = 1$.

Решение. Рассмотрим левую часть уравнения: $|cosx| \leq 1$ и $|cos5x| \leq 1$. Следовательно, произведение множителей $(cosx \cdot cos5x)$ может равняться 1 тогда и только тогда, когда выполняется следующая совокупность:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos x = 1, \\ \cos 5x = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} \cos x = -1, \\ \cos 5x = -1 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2\pi n, n \in Z, \\ x = \pi + 2\pi n, n \in Z \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \pi n, n \in Z.$$

Ответ: $x = \pi n, n \in Z$

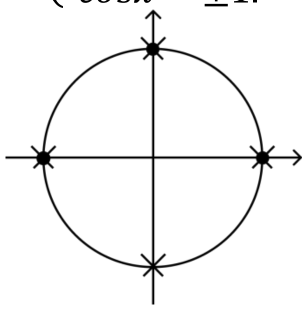
Пример 3. Решите уравнение $sin^7 x + cos^8 x = 1$.

Решение. Оценим левую часть уравнения: $sin^7 x \leq sin^2 x, cos^8 x \leq cos^2 x$. Тогда: $sin^7 x + cos^8 x \leq sin^2 x + cos^2 x = 1$.

С учетом оценки:

$$sin^7 x + cos^8 x = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} sin^7 x = sin^2 x, \\ cos^8 x = cos^2 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} sin^2 x(sin^5 x - 1) = 0, \\ cos^2(cos^6 x - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} sinx = 0, \\ sinx = 1, \end{array}\right. (\bullet) \\ \left[\begin{array}{l} cosx = 0, \\ cosx = \pm 1. \end{array}\right. (\times) \end{cases}$$



Ответ: $x = \pi n,\ \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$.

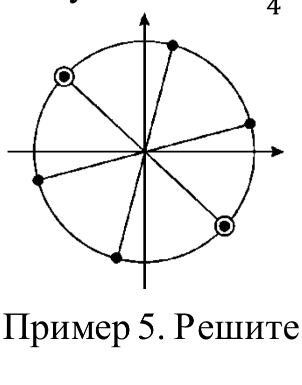
Пример 4. Решите уравнение $sin2x - sin6x + 2 = 0$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $sin2x + (-sin6x) = -2$.

Поскольку $sin2x \geq -1$ и $-sin6x \geq -1$, исходное уравнение равносильно системе

$$\Leftrightarrow \begin{cases} sin2x = -1, \\ -sin6x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n, \\ x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi k}{3}, \end{cases} n, k \in Z.$$

Найдем пересечение серий решений уравнений на единичной окружности. Получим $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$.



Ответ: $x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$.

Пример 5. Решите уравнение

$$\arccos(2x^2-3) - ctg^2\sqrt{x} + \frac{2}{1-cos2\sqrt{x}} = 1 - \sqrt{x^4 - x^3 + 2x + x^2 - 6}.$$

Решение.

$$ОДЗ: \begin{cases} -1 \le 2x^2 - 3 \le 1, \\ x \ge 0, \\ \sqrt{x} \ne \pi k, k \in Z, \\ x^4 - x^3 + 2x + x^2 - 6 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \le x \le \sqrt{2}, \\ \sqrt{x} \ne \pi k, k \in Z, \\ x^4 - x^3 + 2x + x^2 - 6 \ge 0. \end{cases}$$

После применения формул тригонометрии уравнение приводится к виду:

$\arccos(2x^2-3) = -\sqrt{x^4 - x^3 + 2x + x^2 - 6}$

Левая часть уравнения неотрицательна, а правая часть неположительна. Следовательно, уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} \arccos(2x^2-3) = 0, \\ x^4 - x^3 + 2x + x^2 - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 3 = 1, \\ x^4 - x^3 + 2x + x^2 - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \sqrt{2}, \\ x^4 - x^3 + 2x + x^2 - 6 = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\sqrt{2} \notin ОДЗ, \\ x^4 - x^3 + 2x + x^2 - 6 = 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

В первой системе $\sqrt{2}$ удовлетворяет второму уравнению.

Ответ: $x = \sqrt{2}$

Пример 6. При каких значениях параметра a уравнение

$$\sqrt{4-x^2} + a\sqrt{x^2 - x - 2} + \sqrt{x^2 + x - 2} = a^2 - ax - 1$$

имеет единственное решение?

Решение. Преобразуем подкоренные выражения:

$$\sqrt{(2-x)(2+x)} + a\sqrt{(x+1)(x-2)} + \sqrt{(x+2)(x-1)} = a^2 - ax - 1.$$

Найдем ОДЗ уравнения:

$$\begin{cases} (2-x)(2+x) \ge 0, \\ (x+1)(x-2) \ge 0, \\ (x+2)(x-1) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-2; 2], \\ x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty), \\ x \in (-\infty; -2] \cup [1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{-2; 2\}.$$

Таким образом, при любом a множество корней уравнения содержится в двухэлементном множестве {–2; 2}, а значит, уравнение имеет единственное решение тогда и только тогда, когда один из этих элементов удовлетворяет уравнению, а второй – нет.

Подставим в уравнение полученные допустимые значения переменной x и найдем a. Если $x = 2$, то $2 = a^2 - 2a - 1$, и значит, $a = -1$ или $a = 3$. Если же $x = -2$, то $2a = a^2 + 2a - 1$, и значит, $a = \pm 1$. Делаем вывод, что при $a = -1$ уравнение имеет два корня, при $a = 3$ и при $a = 1$ уравнение имеет один корень, а при остальных a уравнение не имеет корней.

Ответ: $a = 3$, $a = 1$.

Пример 7. Найдите наибольшее значение параметра a, при котором неравенство

$$\sqrt{a^5}(14x-49-x^2)+\frac{\sqrt{a}}{(14x-49-x^2)}\geq -\frac{1}{2}a|cos\pi x|$$

имеет хотя бы один корень.

Решение.

1. Если $a = 0$, то неравенство выполняется.
2. Пусть $a > 0$. Преобразуем выражение:

$$a\sqrt{a}\left(a(x-7)^2+\frac{1}{a(x-7)^2}\right)\leq\frac{1}{2}a|cos\pi x|$$

$$\sqrt{a}\left(a(x-7)^2+\frac{1}{a(x-7)^2}\right)\leq\frac{1}{2}|cos\pi x|$$

Сумма пары взаимно-обратных чисел не меньше 2. Следовательно, левая часть неравенства не меньше $2\sqrt{a}$. $|cos\pi x|\leq 1$, значит, правая часть неравенства не больше $\frac{1}{2}$. Следовательно, чтобы данное неравенство имело хотя бы одно решение, необходимо выполнение условия: $2\sqrt{a}\leq\frac{1}{2}\Leftrightarrow a\leq\frac{1}{16}$.

Наибольшее значение $a=\frac{1}{16}$.

Если $a=\frac{1}{16}$, то левая часть последнего неравенства $\geq\frac{1}{2}$, а правая часть $\leq\frac{1}{2}$.

Левая часть неравенства достигает наименьшего значения при условии:

$$a(x-7)^2=\frac{1}{a(x-7)^2}\text{ или }(x-7)^4=256,\ x=3\text{ или }x=11.$$

При этих значения x правая часть неравенства равна $\frac{1}{2}$.

Ответ: $\mathrm{x}=\frac{1}{16}$.

Вывод. Был изучен теоретический материал по теме «Область определения и область значений функций». Автором самостоятельно составлено более 15 примеров на применение ОДЗ и ограниченности функций, в том числе содержащих параметр. Некоторые примеры снабжены подробным решением.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азаров А.И., Гладун О.М., Кремень Ю.А., Федосенко В.С. Алгебраические уравнения и неравенства: Учебное пособие. – Минск: ООО «Тривиум», 1997. – 128 с.
2. Шестаков С.А. ЕГЭ 2020. Математика. Задачи с параметром. Задача 18 (профильный уровень) / Под ред. И.В. Ященко. – М.: МЦНМО, 2020. – 288 с.

3. Корянов А.Г., Прокофьев А.А. Математика. ЕГЭ 2011. Уравнения и неравенства с параметрами: количество решений // https://alexlarin.net/ege/2011/c52011.pdf

ИЗУЧЕНИЕ ОБЪЕМА КРАТКОВРЕМЕННОЙ ПАМЯТИ И ЕЕ ЗАВИСИМОСТЬ ОТ ВЕДУЩЕГО СПОСОБА ВОСПРИЯТИЯ

Волокитин Виктор, Анастасов Георгий

Муниципальное бюджетное образовательное учреждение дополнительного образования «Центр дополнительного образования детей им. В. Волошиной», 9 класс

г. Кемерово

Руководитель: Горшкова Любовь Андреевна, педагог дополнительного образования

В современном мире, чтобы добиться успеха в обучении или профессиональной деятельности необходимо запоминать большое количество разноплановой информации, которая поступает к нам от различных органов чувств во время обучения, занятий, в повседневной жизни.

Объем в первую очередь устанавливает особенность механического запоминания, функционирующую без активного подключения мышления в запоминании. Объем кратковременной памяти достаточно ограничен и зависит от различных факторов, одним из которых, возможно, является способ восприятия. Если это действительно так, то знание своего способа восприятия может помочь человеку более эффективно обучаться и запоминать информацию, более активно и разнообразно используя именно свой, самый эффективный способ восприятия.

В данной работе мы хотим выяснить, влияет ли ведущий способ восприятия информации на объем различных видов кратковременной памяти.

Задачи:

1. Составить анкету-опросник и провести анкетирование среди учащихся МБНОУ «Городской классический лицей» (г. Кемерово).
2. Провести корреляционный анализ и выявить возможную зависимость объема различных видов КВП и ведущего способа восприятия респондентов.

Работа выполняется на базе ЦДОД им. В. Волошиной, с октября 2021 г. В тестировании принимают участие ученики 8, 9 и 10 классов МБНОУ

«ГКЛ», из которых 43 человека – девушки, а 32 человека – юноши. Общее количество респондентов в настоящий момент составило 75 человек.

Тестирование состояло из 2-х частей. В первой части респондентам был предоставлен тест, составленный на основе диагностики доминирующей перцептивной модальности С. Ефремцева, взятой из открытых источников[1].

В нашем исследовании мы использовали две формы этого теста. Электронная форма опросника представляла собой адаптацию под Google-формы и рассылалась на электронную почту участникам опроса. Второй вариант использовался при традиционном очном тестировании.

Тест состоит из 48 вопросов, описывающих различные ситуации. Респонденты должны ответить на них либо положительно (+), либо отрицательно (-). Полученные данные оформлялись в сводную таблицу, выполненную в программе MicrosoftExel, и проводился подсчет уровней перцептивной модальности для каждого из канала восприятия (визуального, аудиального, кинестетического) в баллах, согласно ключам, предложенным автором теста.

Вторая часть исследования –изучение объема кратковременной памяти – проводилась с помощью методики изучения типа памяти (слуховая, зрительная, моторно-слуховая, зрительно –моторно - слуховая) и диагностики продуктивности запоминания [2].

Для изучения типов памяти использовались 4 группы слов, тематически не связанных между собой, которые предлагались для воспроизведения респондентам с 10-минутным перерывом между заданиями.

Тип памяти участника исследования характеризуется тем, в каком из рядов, было больше воспроизведено слов.

Подсчитывается коэффициент типа памяти (С): $C = \frac{a}{10}$,

Где a – количество правильно воспроизведенных слов.

Чем ближе коэффициент к «единице», тем лучше развит данный тип памяти.

Для диагностики продуктивности запоминания использовались числовые ряды, которые участники должны были воспроизвести после прочтения ведущим (слуховая память).

Неправильно воспроизведенные по порядку и величине числа не учитываются. Пропуски чисел в ряду не считаются ошибкой. Результаты подсчитывались по следующей формуле:

Продуктивность запоминания ($ПЗ_1$)=n_1-n_2

где n_1–количество правильно воспроизведенных чисел

n_2–количество ошибок.

Для выявления продуктивности запоминания на основе зрительной памяти испытуемые должны были запомнить 20 чисел с их порядковыми номерами. На запоминание было дано 40 секунд. По истечению этого срока анкетируемые переворачивали листок с числами и записывали ответ на листок.

Продуктивность запоминания рассчитывалась по формуле:
(ПЗЗ) = n/20х100%,где n –число правильно воспроизведенных чисел.

Результаты всех испытаний заносились в итоговую таблицу и в дальнейшем обрабатывались в статистической программе EASYSTAT, (автор – к.б.н. Иванов В.И., КемГУ). Проводился корреляционный анализ между показателями ведущего способа восприятия и объемом различных видов кратковременной памяти.

При корреляционном анализе использовались также такие данные, как возраст и пол респондентов (рис.1). Значимый коэффициент корреляции – выше 0,5.

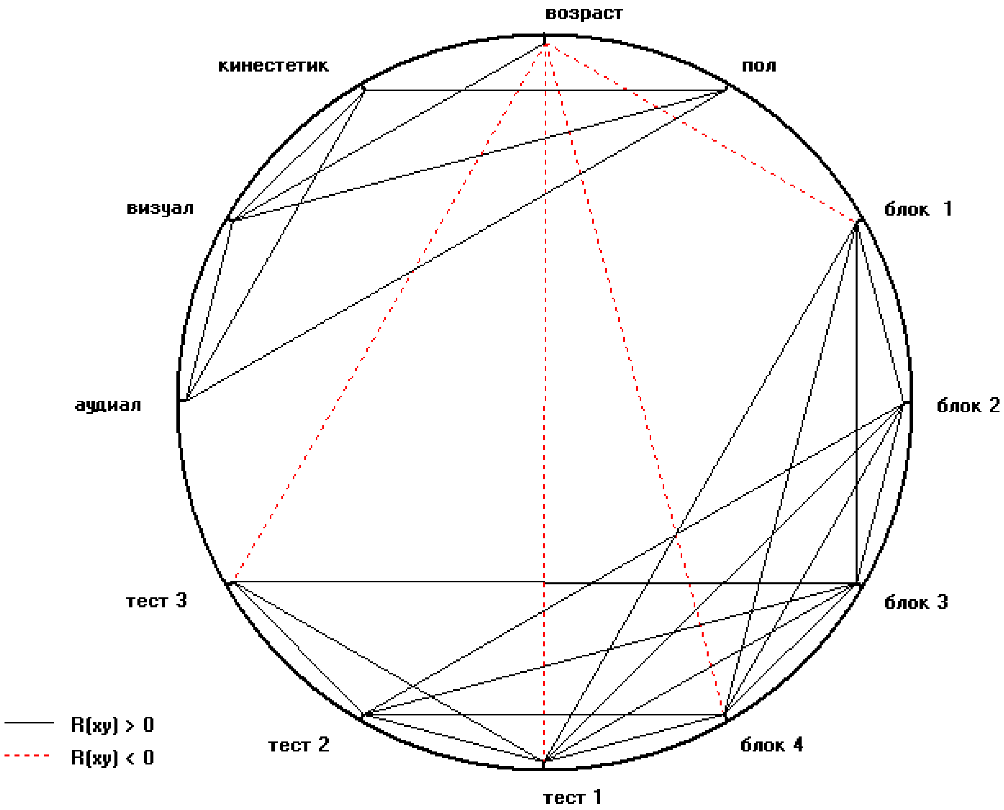


Рис. 1. Корреляционный анализ по Пирсону
(сплошная линия – прямая зависимость, штрих-линия – обратная зависимость)

Ожидаемые результаты проявились при корреляции таких показателей, как объем слуховой памяти и продуктивность воспроизведения звуковой информации (k = 0,5), а также объем зрительной памяти и зрительно - моторно - слуховой (k = 0,53).

Использование зрительно – моторно - слухового типа памяти повышает продуктивность запоминания «на слух» (k = 0,5).

На общие результаты запоминания существенное влияние оказывает объем слуховой памяти (коэффициент корреляции = 0,64) и зрительно – моторно - слухового восприятия (k = 0,76).

Наблюдается обратная взаимозависимость, достаточно близкая к значимой, между такими показателями как «возраст» и «слуховой тип памяти» (k=0,43). Чем младше испытуемый, тем больший объем кратковременной памяти он показывает.

По ведущему типу восприятия в исследовании наиболее часто встречаются испытуемые с сочетаниями «аудиал – визуал» (коэффициент корреляции = 0,57) и «аудиал - кинестетик» (k = 0,51). То есть можно сказать, что старшеклассники, учащиеся в Городском классическом лицее большую часть информации воспринимают «на слух».

Зависимость между ведущим каналом восприятия и объемом какого-либо типа памяти (слуховой, зрительной, моторно-слуховой или зрительно - моторно- слуховой) не выявлена.

Информационные источники:

1. Диагностики доминирующей перцептивной модальности (С. Ефремцев) //[Электронный источник]. Дата обращения 15.10.21. Код доступа: https://onlinetestpad.com/ru/test/1361-diagnostika-dominiruyushhej-perceptivnoj-modalnosti-s-efremceva

2. Методика изучения типов памяти. Диагностика продуктивности запоминания. [Электронный источник]. Дата обращения 15.10.21. Код доступа:https://studfile.net/preview/2910148/page:6/

ОБУЧАЮЩИЙ КУРС ПО КОМБИНАТОРИКЕ. РАЗЛИЧНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Кузнецова Ульяна, Вологжанин Артемий

Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение лицей при ТПУ , 10 класс

г. Томск

Руководитель: Киреенко Светлана Григорьевна, учитель математики

Математика, как наука, имеет множество разделов, но, к сожалению, на многие из них не хватает времени в рамках школьной программы. Именно поэтому мы решили создать обучающий курс, который помог бы школьникам старших и средних классов лучше разобраться в комбинаторике.

Актуальность: Во многих учебных заведениях комбинаторика проходится на протяжении всего нескольких уроков, и этого хватает только для того, чтобы составить общее представление об этой дисциплине. Но поверхностных знаний зачастую недостаточно, так как понимание комбинаторики может оказаться необходимым для решения различных олимпиадных заданий и при учёбе в высших учебных заведениях.

Цель: Повысить уровень знаний по комбинаторике среди учеников старших и средних классов.

Задачи:

1. Изучить теоретический материал по школьному курсу комбинаторики.
2. Научиться распознавать и решать задачи, в которых целесообразно использование тех или иных правил.
3. Найти задачи для иллюстрации различных правил.
4. Провести тестирование и выявить слабые места.
5. Создать обучающий курс по решению задач на применение правил комбинаторики.

Теоретические сведения

Определение 1: Если некоторый объект *A* можно выбрать способами, а другой объект *B* можно выбрать *n*способами, то выбор «либо *A*, либо *B*» можно осуществить $m+n$ способами, это называется **правилом суммы**.

Определение 2:Если объект *A* можно выбрать *m* способами и если после каждого такого выбора объект *B* можно выбрать *n* способами, то выбор пары (*A*;*B*) в указанном порядке можно осуществить *mn*способами, это называется **правилом произведения**.

Важное замечание: При использовании правила суммы надо следить, чтобы ни один из способов выбора объекта A не совпадал с каким-нибудь способом выбора объекта B (чтобы комбинация не попала сразу в два класса). Если такое произойдёт, правило суммы утрачивает свою силу. Тогда надо использовать формулу m+n-k, где k-число совпадений.

Следствие 1.Составим **размещения без повторений** из пэлементов по k. Сделаем k выборов. Выберем любой из имеющихся n элементов, затем выберем из n-1 элементов. Аналогично и на третьем шагу для выбора остаётся n-2 и т.д. На каждом k-м шагу из n-(k-1). Применяя правило произведения, получаем, что число размещений без повторений из n элементов по k выражается следующим образом.

$$A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1)$$

Теперь домножим числитель и знаменатель на произведение:

$(n-k)(n-k-1)\times \ldots \times 1$:

$$A_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)(n-k)(n-k-1)\times \ldots \times 1}{(n-k)(n-k-1)\times \ldots \times 1}$$

В числителе получилось произведение всех чисел от 1 до n. Таким образом, получаем следующую формулу:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

По этой формуле находится количество возможных **размещений без повторений**.

Следствие 2.Размещение из nэлементов по n, то есть те, в которые входят все элементы из выбранного множества, называются **перестановками**. А именно,

$$P_n = A_n^n = n(n-1)\times \ldots \times 1 = n!$$

Но если во множестве существуют одинаковые элементы (т.е. при их перестановке ничего не меняется), то количество перестановок в таком множестве будет определяться по формуле:

$$P(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots\, n_k!}$$

Где $n_1, n_2, \ldots, n_k$- количество одинаковых элементов.

Следствие 3.**Сочетаниями из n элементов по k**, называют любой выбор k элементов из имеющихся различных n элементов. Формула для числа сочетаний легко получается из формулы для числа размещений.

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\, k!}$$

$$C_n^k = P(k, n-k)$$

<u>Пример 1.</u> Решить задачу, на применение правила суммы.

В магазине игрушек продаются 3 различных вида кукол и 4 различных вида плюшевых медведей. Сколькими различными способами можно приобрести одну игрушку?

Решение:

Куклу (объект А) можно выбрать 3-мя различными способами, а плюшевого медведя (объект В) - 4-мя способами, тогда выбор либо куклы, либо медведя можно осуществить 3+4=7 способами.

Ответ: 7

<u>Пример 2.</u> Решить задачу, на применение правила произведения.

Из города X в город Y ведёт 8 различных дорог, а из города Y в город Z- 3 дороги. Сколько путей, проходящих через Y ведут из X в Z?

Решение:

Дорогу из X в Y (объект А) можно выбрать 8-ю способами, а дорогу из Y в Z (объект В) - 3-мя. Для того чтобы добраться из города X в город Z, необходимо сначала выбрать одну из восьми дорог из X в Y, а затем одну из трёх дорог из Y в Z. Сделать это можно 8*3=24 способами.

Ответ: 24

<u>Пример 3.</u> Решить задачу на применение перестановки

Сколькими способами можно рассадить четверых учащихся на 4 стула в школьной столовой, если стулья разные по цвету (есть красный, синий, зелёный и жёлтый стул)?

Решение:

Применим формулу для перестановки:

$$P_n = n!$$

Получим, что $P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

Ответ: 24

<u>Пример 4.</u>

Сколькими способами можно рассадить четверых учащихся на 2 стула в школьной столовой, если стулья разные по цвету (есть красный и синий стул)?

Решение:

На красныйстул может сесть любой из четырёх учащихся, на синий – любой из трёх оставшихся.

При решении задачи из 4 учеников мы образовали соединения по два ученика в каждом, причём любые два соединения отличались либо составом, либо тем на стульях какого цвета сидели ученики. Следовательно, тут можно применить формулу размещения.

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = 12$$

Ответ: 12

Сколькими способами можно рассадить четверых учащихся на 2 одинаковых стула в школьной столовой?

Решение:

При решении этой задачи были образованы пары – соединения по 2 ученика, которые отличались друг от друга только составом. Такие соединения называют сочетаниями.

Для сочетанияестьформула:

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

$$C_4^2 = \frac{4!}{(4-2)! \cdot 2!}$$

Ответ: 6

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Н.Я. Виленкин, А.Н. Виленкин, П.А. Виленкин- «Комбинаторика»

МНОГОГРАННОСТЬ ТЕОРЕМЫ ПИФАГОРА

Борздун Елена Вадимовна

Муниципальное нетиповое общеобразовательное учреждение «Городской классический лицей», 9 класс

г. Кемерово

Руководитель: Борздун Ольга Владимировна, преподаватель математики

«Теорема Пифагора — одна из основополагающих теорем евклидовой геометрии, устанавливающая соотношение между сторонами прямоугольного треугольника». Существует около 500 различных доказательств этой теоремы (геометрических, алгебраических, механических и т.д.), что свидетельствует о гигантском числе ее конкретных реализаций, поэтому эта тема и стала основой для нашего исследования.

Теорема Пифагора - это одна из самых важных теорем геометрии. Значение ее состоит в том, что из нее или с ее помощью можно вывести большинство теорем геометрии.

Цель нашей работы: исследование различных способов доказательства теоремы Пифагора и ее практическое применение.

Задачи:

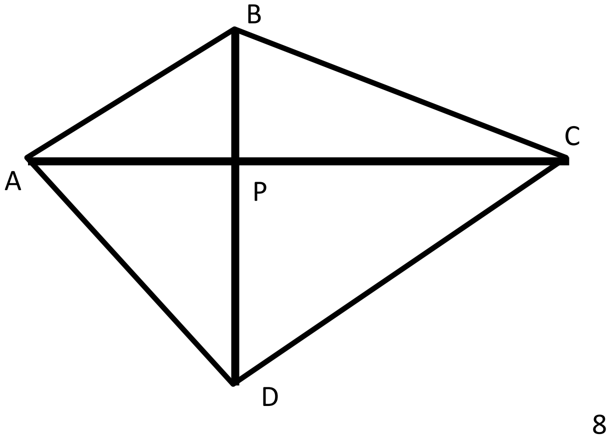
1. Выяснить историю возникновения теоремы.
2. Рассмотреть различные способы доказательства теоремы.
3. Исследовать различные способы доказательства данной теоремы, не рассматриваемые в школе;
4. Изучить практическое применение теоремы Пифагора.

Основной метод: метод исследования, систематизации и обработки данных. **Гипотеза:** если теорема Пифагора так популярна и сегодня, то в ней заложены такие основы, которые позволяют использовать ее в широком диапазоне. **Объект исследования:** теорема Пифагора.

Предмет исследования: множество различных доказательств теоремы Пифагора и задачи планиметрии.

Применение теоремы Пифагора к решению задач

Задача 1. [2] Три стороны четырёхугольника в порядке обхода равны 7, 1 и 4. Найдите четвёртую сторону этого четырёхугольника, если известно, что его диагонали перпендикулярны.



Решение:

1) $AB^2=BP^2+AP^2$, $BP^2=AB^2-AP^2$ $BC^2=BP^2+PC^2$, $BP^2=DC^2-PC^2 \Rightarrow$ $AB^2-AP^2=BC^2-PC^2$, $AB^2-BC^2=A^2-PC^2$ (1)

2) $AD^2=AP^2+PD^2$, $PD^2=AD^2-AP^2$ $CD^2=CP^2=PD^2$, $PD^2=CD^2-CP \Rightarrow AD^2-AP^2=CD^2-CP^2$, $AD^2-CD^2=AP^2-CP^2$ (2)

3) Из (1) и (2) $\Rightarrow AB^2-BC^2+AP^2-CP^2=AP^2-PC^2+AD^2-CD^2$

$AB^2-BC^2=AD^2-CD^2$

$AD=\sqrt{CD^2+AB^2-BC^2}=\sqrt{4^2+7^2-1}=\sqrt{64}=8$

Ответ: *AD=8.*

Некоторые интересные соотношения, напоминающие теорему Пифагора.

Решая различные задачи по геометрии повышенной сложности, у нас вызвала интерес данная задача, в которой мы доказали интересное соотношение, напоминающие теорему Пифагора. Далее процесс поиска таких соотношений продолжился, и нам удалось найти и доказать еще несколько соотношений.

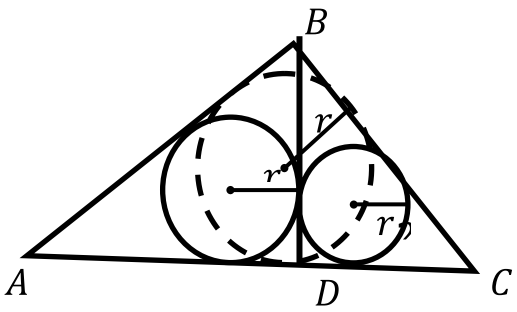
Задача 2.[4, с.23]В прямоугольном треугольнике ABC проведена высота BD. Радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABD и BCD, равны соответственно r_1 и r_2.

Докажите, что $r_1^2+r_2^2=r^2$

$$1) BD - \text{высота в прямоугольном } \Delta ABC$$

$$а) \Delta ABC \sim \Delta ADB \Rightarrow \left(\frac{r_1}{r}\right)^2=\left(\frac{AB}{AC}\right)^2$$

$$б) \Delta ABC \sim \Delta BDC \Rightarrow \left(\frac{r_2}{r}\right)^2=\left(\frac{CB}{CA}\right)^2$$



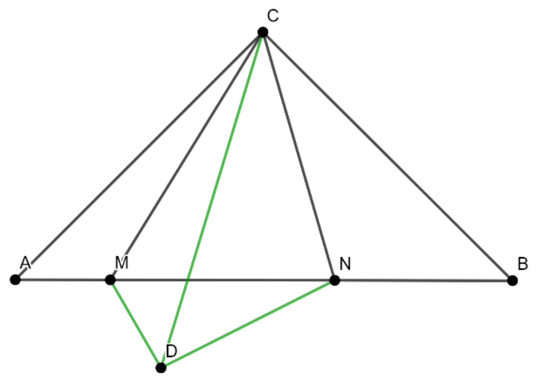
$$2)\ \frac{r_1^2}{r^2}+\frac{r_2^2}{r^2}=\frac{AB^2}{AC^2}+\frac{CB^2}{CA^2}$$

$$\frac{r_1^2}{r^2}+\frac{r_2^2}{r^2}=AB^2+\frac{CB^2}{AC^2}$$

$$(\text{по т.Пифагора } AB^2+CB^2=AC^2)$$

$$\frac{r_1^2}{r^2}+\frac{r_2^2}{r^2}=1 \Rightarrow r_1^2+r_2^2=r^2 \Rightarrow$$

$$r=\sqrt{r_1^2+r_2^2}.$$



Задача 3. [1, с. 150]На гипотенузе AB равнобедренного прямоугольного треугольника ABC отметим точки M и N так, что ∠MCN = 45° (AM<AN).

Докажите, что $\boldsymbol{AM^2+BN^2=MN^2}$

Доказательство.

Проведем отрезок CB так, чтобы AC = CD и ∠DCM = ∠MCA

1)Рассмотрим Δ ACM и Δ CDM:

1. CD = AC (по построению)
2. CM – общая сторона
3. ∠DCM = ∠MCA

→ Δ ACM = Δ CDM (по 1пр.)

Значит, AM = MD.

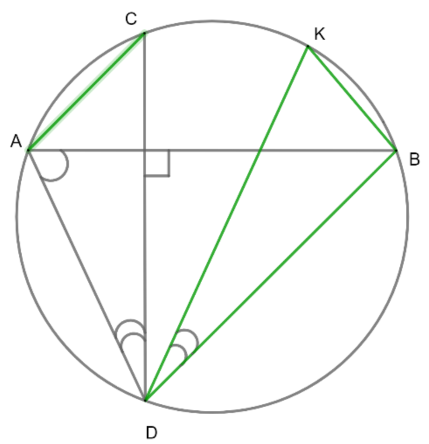
2)BC = AC = CD (т.к. ΔABC – равнобедренный)

3)Пусть ∠DCB = ∠MCA = α, значит ∠BCN = 45° - α и ∠DCN = 45° - α. Следовательно,∠BCN = ∠DCN

4)Рассмотрим ΔDCN и ΔBCN:

1. CD = BC (из п.2)
2. ∠BCN = ∠DCN (из п.3)
3. BN = DN – общая сторона

Δ DCN = Δ BCN (по 1пр.)



Следовательно, BN = ND.

∠CBN = ∠CDN = ∠CDM = ∠MAC = 45° (по доказательству 1 и 4)

Значит, ∠CDN + ∠CDM = 90°

По теореме Пифагора для Δ DCN получаем:

$$ND^2 + MD^2 = MN^2$$

∪BK = ∪AC.

Задача 4. **[1, c.146]**В окружность радиуса R проведены две перпендикулярные пересекающиеся хорды AB и CD.

Докажите, что $\mathbf{AC^2 + BD^2 = 4R^2}$.

Доказательство.

Задача 4. **[1, c.146]**В окружность радиуса R проведены две перпендикулярные пересекающиеся хорды AB и CD.

Докажите, что $\mathbf{AC^2 + BD^2 = 4R^2}$.

Доказательство.

Отметим на окружности такую точку K, что Отметим на окружности такую точку K, что Тогда AC = KB и ∠ADC и ∠KDB равны как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу BD.

Поскольку AB⊥CD, то ∠ADC + ∠DAB = 90°.

Следовательно, ∠KBD = 90° и отрезок KD – диаметр окружности.

По теореме Пифагора $KB^2 + BD^2 = KD^2$ или $AC^2 + BD^2 = 4R^2$. Что и требовалось доказать.

Исследование существования прямоугольного треугольника

Задача (составленная самостоятельно). Возможно ли получить прямоугольный треугольник, если увеличить у данного прямоугольного треугольника стороны на одно и тоже число?

Решение:

Пусть для сторон треугольника выполняется $c^2 = a^2 + b^2$, *тогда нужно доказать, что существует такое число* $x > 0$, *что*

$$(c + x)^2 = (a + x)^2 + (b + x)^2$$

Предположим противное: пусть такие числа существуют. Раскроем скобки во втором равенстве и перенесём всё в левую часть, получим

$$(c^2 - a^2 - b^2) + x(2c + x - 2a - x - 2b - x) = 0.$$

По условию первое слагаемое равно нулю и $x \neq 0$.
Следовательно, $2c + x - 2a - x - 2b - x = 0$ и, соответственно, $x = 2(c - a - b)$. Осталось заметить, что $x > 0$; следовательно, $c > a + b$. Но это противоречит неравенству треугольника. Противоречие.

***Ответ:* нет, не возможно.**

В нашей работе мы рассмотрели:

- историю возникновения теоремы,
- изучили разные способы доказательства теоремы,
- исследовали различные способы доказательства данной теоремы, не рассматриваемые в школе,
- изучили практическое применение теоремы Пифагора,
- отобрали задачи, решаемые с помощью теоремы Пифагора.
- нашли интересные зависимости
- составили самостоятельно задачу и решили её.

Многочисленные доказательства теоремы Пифагора являются не только математическим интересом, но и вызывает восхищение, что теорема Пифагора - одна из самых главных теорем геометрии, потому что с её помощью можно доказать много других теорем и решить множество задач. Для себя мы научились решать задачи повышенной сложности с помощью теоремы Пифагора, что поможет нам при участии в различных математических олимпиадах и конкурсах.

В результате выполнения работы гипотеза подтвердилась, цель работы была достигнута, задачи решены.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Геометрия: 8 класс: учебное пособие/ А.Г. Мерзляк, В.М. Поляков; под ред. В.Е. Подольского. - М. :Вентана –Граф, 2019. – 224 с. ил.

2. https://problems.ru/view_problem_details_new.php?id=53604
3. https://www.problems.ru/view_problem_details_new.php?id=54249
4. Куланин Е.Д. Задачи по геометрии. 9 класс. С решениями, указаниями и ответами. Изд 2-ею М.: Илекса, 2013, 160с.

ВНЕВПИСАННАЯ ОКРУЖНОСТЬ. РАВНЫЕ ОТРЕЗКИ

Акулич Софья

Муниципальное образовательное учреждение, 9 класс

г. Ачинск

Руководитель: Цапкова Ирина Владимировна, учитель математики

При решении многих задач планиметрии возникают различные конфигурации, в которых участвуют треугольник и окружность. Знание наиболее распространенных комбинаций и их свойств позволяет получать короткие и красивые решения сложных на первый взгляд задач. К таким конструкциям в первую очередь относятся «треугольник и описанная окружность», «треугольник и вписанная окружность» [1], которые довольно подробно изучаются в школьном курсе, раскрывая всё новые и новые свойства в планиметрии. А если усилить эти конструкции и провести к треугольнику окружности, касающиеся не только его сторон, но и их продолжений – вневписанные окружности. Какие новые свойства можно получить, какие новые знания откроет для нас раздел «планиметрия»?

Цель работы: доказать выявленные экспериментальным путем свойства отрезков в геометрической конструкции «Треугольник и его вневписанные окружности».

Работа представляет собой сборник свойств вневписанной окружности, позволяющий расширить знания и понимание новых геометрических понятий, возникающих в конструкции «Треугольник и его вневписанные окружности», а также углубление уже полученных знаний в геометрии треугольника. Многие свойства были получены экспериментальным путем с помощью конструирования динамических чертежей в компьютерные программы Геогебра [2], что позволило измерять отрезки и углы при изменении самой конструкции.

В результате проведенных исследований удалось выявить и доказать свойства отрезков, образованные в данной конструкции «треугольник и его вневписанные окружности». Указанные свойства не найти в доступной литературе, а если и есть, то представлены в качестве одной из немногих задач по теме «Вневписанная окружность».

Работа будет полезна учащимся профильных классов, учителям математики и широкому кругу читателей, интересующихся математикой.

Красота геометрии начинается с изучения геометрии треугольника. Треугольник неисчерпаем. Две с половиной тысячи лет постоянно открываются его новые свойства. Чтобы рассказать обо всех известных, необходим том, сравнимый по объему с томом Большой энциклопедии.

Актуальность. Ещё со школьной скамьи хорошо изучены разные конструкции треугольника: пересечение медиан треугольника, ортотреугольник, треугольник и вписанная окружность, треугольник и описанная окружность, прямая Эйлера и т.п. [1]. Каждая новая конструкция, это продолжение предыдущей с некоторыми дополнительными построениями. Так рождаются новые свойства, новые формулы, новые геометрические истины. И чем сложнее конструкция, тем интереснее отрывать новые понятия и новые свойства конструкции. Таким объектом является «вневписанная окружность». Конструкция «треугольник и вневписанная окружность» вызывает огромный интерес у математиков, так как её сложность определяет новые понятия и новые геометрические открытия (рис.1).

Постановка и формулировка проблемы. Тема о замечательных точках треугольника и вневписанной окружности существует не так давно, а значит в ней изучено далеко не всё, например, Христиан Нагель открыл одноименную точку в лишь начале XXI века [1]. В настоящее время немногие учащиеся знают про вневписанную окружность. Знакомство с ней зачастую ограничивается определением, нахождением ее центра и решением нескольких популярных задач, встречающихся на олимпиадах[1]. Таким образом, возникает **проблема**: какие основные свойства у геометрической конструкция «треугольник и его вневписанные окружности»?

Разработанность исследуемой проблемы. Изучая литературу по данной теме, было затруднительным определить свойства вневписанной окружности, этот список довольно скудный [2]. Тем самым решение задачи на вневписанную окружность оказывается чаще крайне затруднительным. Порой свойства вневписанной окружности открываешь для себя в процессе решения задачи. Так как конструкция «треугольник и вневписанная окружность» является довольно сложной, то стоит остановиться на свойствах отрезков в этой конструкции.

Цель исследовательской работы: доказать выявленные экспериментальным путем свойства отрезков в геометрической конструкции «Треугольник и его вневписанные окружности».

Цель предопределила необходимость постановки следующих **задач:**

1. Изучить основные понятия и свойства вневписанной окружности.
2. В программе Geogebra составить динамическую модель-конструкцию. «Треугольник и его вневписанные окружности».
3. Экспериментальным путем определить свойства отрезков в данной конструкции.
4. Доказать выявленные свойства отрезков.
5. Составить таблицу основных свойств вневписанной окружности.

Объект исследования – геометрическая конструкция «треугольник и его вневписанные окружности».

Предмет исследования – свойства вневписанной окружности.

Методы исследования: изучение и анализ литературы, моделирование, эксперимент, анализ, синтез.

Пусть на плоскости изображен треугольник, сколько существует точек, равноудаленных от его сторон? Многие дают немедленный ответ: одна, а именно центр окружности, вписанной в треугольник. Но этот ответ неверен, т.к. существует еще 3 окружности, равноудаленные от его сторон, которые построены на биссектрисах внешних углов треугольника. Такие окружности называются вневписанными.

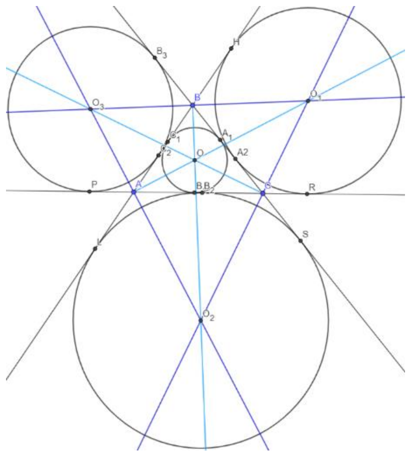


Рис. 1

Вневписанная окружность – это окружность, касающаяся одной из сторон треугольника и продолжений двух других его сторон (рис.1).

Геометрические конфигурации, связанные с вневписанными окружностями, очень содержательны и встречаются во многих задачах. В работе все задачи представлены по одной конструкции (рис 1.), где точки A_1, B_1, C_1 – точки касания вписанной окружности, точки A_2, B_2, C_2 – точки касания вневписанных окружностей с соответствующими сторонамиΔ ABC: BC, AC, AB. Точки O_1, O_2, O_3 – центры вневписанных окружностей , BO_1, BO_3, AO_3, AO_2, CO_1, BO_1 –биссектрисы внешних углов Δ ABC . Рассмотрим основные факты, связанные с такими конфигурациями.

Результат работы представлен в таблице:

Свойства	Доказательства
Центр вневписанной окружности лежит на биссектрисе соответствующего внутреннего угла этого треугольника.	https://www.geogebra.org/classic/dgrysccu
Угол междубиссектрисами смежных углов равен 90°.	https://www.geogebra.org/classic/nzyetg5x
Расстояние от вершины угла треугольника до точки касания вневписанной окружности со стороной этого угла равно полупериметру данного треугольника.	https://www.geogebra.org/classic/wpscpqnj
Отрезки, соединяющие вершины треугольника с точками касания вневписанных окружностей, попарно равны.	https://www.geogebra.org/classic/msrvgvcw
Точка пересечения биссектрисы с описанной окружности вокруг треугольника равноудалена от центра вписанной окружности треугольника и центра вневписанной окружности.	https://www.geogebra.org/classic/cs9hnuwn
Отрезки, соединяющие точки касания вневписанных окружностей двух соседних сторон треугольника и точки симметричные середине отрезка, соединяющего точки касания, относительно середин середины третьей стороны, равны.	https://www.geogebra.org/classic/tjy5tmn8
Середина отрезка, соединяющего вершину треугольника и центр противоположной вневписанной окружности, равноудалена от другой вершины и противолежащей этой вершине точки касания вневписанной окружностью стороны треугольника	https://www.geogebra.org/classic/msrvgvcw

Равные отрезки и точка нагеля	https://www.geogebra.org/classic/af2zwvjt
Высоты внутреннего треугольника Жергонна соответственно равны и параллельны высотам внешних треугольников Жергонна, проведенных к большей стороне.	https://www.geogebra.org/classic/msrvgvcw

Заключение

Вневписанная окружность – это очень интересная и разнообразная конструкция, в которой можно увидеть множество красивых свойств. С помощью программы Геогебра проведен ряд экспериментов, выявлены равные отрезки в геометрической конструкции «Треугольник и его вневписанные окружности». В процессе работы конструкцию усложнили, рассмотрев свойства отрезков, образованных точкой Нагеля, а также, свойство отрезков в треугольниках Жергонна. Все задачи, полученные экспериментальным путем, доказаны, систематизированы и оформлены в сборник

В настоящее время крайне редко на уроках рассматривают вневписанную окружность, хотя данная тема встречается в задачах ОГЭ и ЕГЭ, олимпиадах разного уровня, поэтому данная работа будет интересна и полезна учащимся профильных классов, учителям математики. Она позволит любому желающему разобраться в основах конструкции с вневписанной окружностью, понять ее логику и научиться видеть свойства

Исследование требует продолжения. Одним из возможных направлений дальнейшего исследования можно считать изучение равных углов в конструкции с вневписанной окружностью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Блинков А.Д. Учим математике. Материалы открытой школы-семинара//Под ред. А.Д.

Блинкова и П.В. Чулкова.-М: МЦНМО, 2018.- 108 с.

2. Гохидзе М.Г. Вневписанная окружность // Математика в школе. – 1989. – №3. – С. 59

3. Заславский А.А. Элементы математики в задачах. Через олимпиады и кружки- к профессии //Под ред. А. А. Заславского, А. Б. Скопенкова и М. Б. Скопенкова. — М.: МЦНМО, 2018. — 592 с.

4. Гордин Р.К Геометрия. Планиметрия 7-9 классы. 2-изд., испр. - М.: МЦНМО, 2004. -416с.

5. Останин П.А. Терешин Д.А. Планиметрия в задачах// Под ред. П.А Останина и Д.а. Терешина.-М:МФТИ,2020.-254 с.

6. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии. Ч.1.-М.:Наука,1991.-220с.

7. О свойствах центра вневписанной окружности // Квант – 2001. – №2. – С. 38-40.

8. Интернет- проект «Задачи» https://www.problems.ru/

9. Динамичное програмное обеспечение Geogebrahttps://www.geogebra.org/

10.Гнеденко, Б.Г.Энциклопедический словарь юного математика/ Б.Г. Гнеденко.-Москва:Просвещение,1985 год -452 с.
11.Динамичное программное обеспечение Geogebrahttps://www.geogebra.org/

ПРИМЕНЕНИЕ ЧЕТНОСТИ ФУНКЦИЙ ПРИ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ, НЕРАВЕНСТВ И ИХ СИСТЕМ

Семёнова Екатерина
Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение лицей при ТПУ, 10 класс
г. Томск
Руководитель: Киреенко Светлана Григорьевна, учитель математики

I. Введение

Существует множество различных способов решения уравнений и неравенств, многими из которых мы пользуемся на уроках. При этом большинство из этих способов, алгебраические, с помощью которых не всегда можно решить любое уравнение или неравенство. Тогда на помощь приходят функциональные методы решения. В данной работе я хочу рассмотреть один из таких методов, а именно применение чётности функций при решении различных уравнений и неравенств.

Цель проекта: углубление знаний в области математике и популяризация нетрадиционных методов решения уравнений, неравенств и их систем.

Задачи:

- Изучить теорию по теме “чётные и нечётные функции”
- Разобрать примеры и научиться определять задачи, в которых целесообразно применять функциональные методы
- Подобрать уравнения, неравенства и их системы на различные способы применения чётности и нечётности функций
- Самостоятельно составить подобные примеры

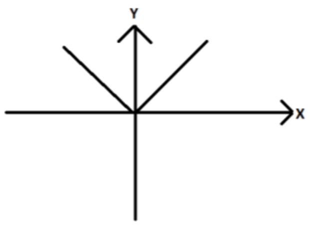
Новизна: возможно, я не внесу большой вклад в развитие этой темы, но смогу её разнообразить своими примерами и поделиться разработанным материалом со сверстниками, а также глубже изучить темы “функции” и “методы решений уравнений и неравенств”.
Актуальность: применение чётности может быть полезно как для учеников из общеобразовательных классов, так и для учеников из классов с углублённым изучением математики. Например, подобные задачи могут встретиться, как и в обычной школьной практике, так и на различных олимпиадах, кроме того, применение четности функций может оказаться полезным на ЕГЭ по математике.

II. Теоретические сведения

Чётная функция — это функция, для всех x из области определения которой выполняется равенство ***f(-x) = f(x)***

- График чётной функции симметричен относительно оси ординат.

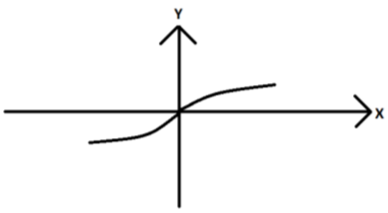
Пример: y = |x|



Нечётная функция — это функция, для всех x из области определения которой выполняется равенство ***f(-x) = -f(x)***

- График нечётной функции симметричен относительно начал координат.

Пример: y = x^3



Функция, не являющаяся ни чётной, ни нечётной, называется ***функций общего вида***

<u>*Замечание.*</u> Область определения чётной и нечётной функции симметрична относительно нуля

Свойства чётных и нечётных функций:

1) *f(x) и g(x)*— чётные функции:

I. *f(x) ± g(x) — чётная функция*
II. *f(x) • g(x) — чётная функция*
III. $\frac{f(x)}{g(x)}$(*g(x)*≠0) — *чётная функция*

2) *f(x) и g(x)* — нечётные функции:

I. *f(x) ± g(x) — нечётная функция*
II. *f(x) • g(x) — чётная функция*

III. $\frac{f(x)}{g(x)}$($g(x)$≠0) *— чётная функция*

3) $f(x)$ — чётная функция, $g(x)$ — нечётная функция ($g(x)$≠0):

I. *f(x) ± g(x) — функция общего вида*

II. *f(x) • g(x) — нечётная функция*

III. $\frac{f(x)}{g(x)}$ *— нечётная функция*

- Рассмотрим уравнение вида *f(x)* = 0, где *f(x)* — чётная или нечётная функция.

Для решения уравнения необходимо найти положительные (отрицательные) корни, а потом добавить корни противоположные к найденным.

Для нечётной функции *f(x)* корнем будет являться x=0 (при условии, что 0 принадлежит области определения). Для чётной функции корень x=0 проверяется подстановкой в уравнение.

- Рассмотрим неравенство *f(x)* > 0 (*f(x)* < 0).

Если *f(x)* — чётная функция, то при решении достаточно найти неотрицательные числа и добавить в ответ симметричный промежуток.

Если *f(x)* — нечётная функция, то сначала необходимо найти множество неотрицательных чисел, а потом с учётом найденных промежутков методом интервалов выбрать промежутки из отрицательной области.

III. Разбор примеров

Пример 1.

Найти сумму корней уравнения:

1. $5x^{2022}+x^2-4x^{36}-2=0$

Решение. Функция, стоящая в левой части уравнения, является чётной. Следовательно, сумма корней уравнения будет равна 0, при условии, что это уравнение имеет корни

± 1 — очевидные корни уравнения.

2. $tg\ x+x+x+5x^{21}=0.$

Решение. Функция, стоящая в левой части уравнения, является нечётной. 0 — очевидный корень уравнения. Следовательно, если уравнение имеет ещё корни, то они будут противоположными. Таким образом, сумма корней уравнения равна 0.

Пример 2.

Решить уравнение $4^{|x-2|+|x+2|} = 8^{|x|}$

Решение. В обеих частях уравнения функции чётные, значит, сначала можно найти корни на промежутке [0; + ∞)

– Пусть x∈ [0; 2], тогда уравнение принимает вид

$$2^{2(2-x+x+2)} = 2^{3x}$$

$$8 = 3x$$

$$x = \frac{8}{3}$$

– Пусть x∈ (2; + ∞), тогда уравнение принимает вид

$$2^{2(x-2+x+2)} = 2^{3x}$$

$$4x = 3x$$

$$x=0 \notin (2; +\infty)$$

Следовательно, исходное уравнение имеет два корня $\frac{8}{3}$ и $-\frac{8}{3}$.

Ответ: $\pm\frac{8}{3}$

Пример 3.

При каких значениях параметра a уравнение $2x^2 - atg(\cos x) + a^2 = 0$ имеет единственное решение?

Решение. Функция, стоящая в левой части уравнение, чётная. Значит, данное уравнение инвариантно относительно замены x на $-x$, т.е. если x_0 - корень уравнения, то и $-x_0$ тоже является корнем этого уравнения. Таким образом, единственным корнем данного уравнения может быть только $x = 0$.

Пусть $x = 0$, тогда

$$0 - atg1 + a^2 = 0$$
$$a = 0 \text{ или } a = tg1$$

Проверим найденные значения параметра a :

1. Если $a = 0$, то уравнение имеет единственное решение $x = 0$
2. Если $a = tg1$, то имеем

$$2x^2 - tg1 \cdot tg(\cos x) + tg^2 1 = 0$$
$$2x^2 + tg^2 1 = tg1 \cdot tg(\cos x)$$

Левая часть уравнения не меньше, чем $tg^2 1$ (т.к. $2x^2 \geq 0$).

Рассмотрим правую часть уравнения. $-1 \leq \cos x \leq 1$, функция $y = tgt$ возрастает на промежутке $[-1; 1]$, следовательно, $tg(\cos x) \leq tg1$. А так как $tg1 > 0$, то правая часть уравнения не больше, чем $tg^2 1$.

Значит, уравнение $2x^2 - tg1 \cdot tg(\cos x) + tg^2 1 = 0$ равносильно системе

$$\begin{cases} 2x^2 + tg^2 1 = tg^2 1 \\ tg1tg(\cos x) = tg^2 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Ответ: $a = 0$, $a = tg1$.

Пример 4.

Найти все значения параметра a , при которых неравенство $\cos x - 2\sqrt{x^2+9} \leq -\frac{x^2+9}{a+\cos x} - a$ имеет единственное решение.

Решение. В правой и левой частях неравенства содержатся чётные функции относительно переменной x , следовательно, единственным решением неравенства может быть только x=0.

Пусть $x = 0$, тогда

$$\frac{9}{a+1} + a - 5 \leq 0$$
$$\frac{(a-2)^2}{a+1} \leq 0$$
$$a \in (-\infty; -1) \cup \{2\}$$

При $a \in (-\infty; -1) \cup \{2\}$ исходное неравенство среди решений содержит $x = 0$. Найдём значения a, при которых $x = 0$ - единственное решение.

1. $a = 2$

$$\cos x - 2\sqrt{x^2+9} \le -\frac{x^2+9}{2+\cos x} - 2$$

Умножим обе части неравенства на $(\cos x + 2)$, так как $\cos x + 2 > 0$, то знак сохраняется:

$$x^2 + 9 - 2\sqrt{x^2+9}(2+\cos x) + \cos^2 x + 4\cos x + 4 \le 0$$

Свернём левую часть неравенства по формуле “квадрата разности”, получим

$$\sqrt{x^2+9} = \cos x + 2$$

Так как $\sqrt{x^2+9} \ge 3$, а $\cos x + 2 \le 3$, то уравнение $\sqrt{x^2+9} = \cos x + 2$ равносильно системе $\begin{cases}\sqrt{x^2+9} \ge 3\\ \cos x + 2 = 3\end{cases} \Leftrightarrow\ x = 0.$

2. $a \in\ (-\infty;\ -1)$

Заметим, что в левой части неравенства при подстановке любого x получается число не больше -5, а в правой части получается положительное число. Имеем, $x \in \mathbb{R}$, что не соответствует условию.

Ответ: a = 2.

<u>Пример 5.</u>

При каких значениях параметра a $\begin{cases}3\cdot 2^{|x|} + 5|x| + 4 = 3y + 5x^2 + 3a\\ x^2 + y^2 = 1\end{cases}$ имеет единственное решение?

Выразим из второго уравнения y и подставим в первое, то получим чётную функцию относительно x. Тогда одним из корней уравнения будет являться 0.

Тогда

$$y = \pm 1$$
$$3 + 4 = \pm 3 + 3a$$
$$3a = 4 \text{ или } 3a = 10$$
$$a = \frac{4}{3} \text{ или } a = \frac{10}{3}$$

Рассмотрим случаи, когда уравнение имеет только один корень:

1. $a = \frac{4}{3}$

Если $y = \sqrt{1-x^2}$, то $3\cdot 2^{|x|} + 5|x| = 3\sqrt{1-x^2} + 5x^2$. Если корней не будет при $0 < x \le 1$, то их не будет и при $-1 \le x < 0$.

При $0 < x \le 1$, функция в левой части монотонно возрастает. Функция в правой части: $\left(3\sqrt{1-x^2} + 5x^2\right) = 10 - \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \Rightarrow\ 1 - x^2 = \frac{9}{100}$; имеет максимум на рассматриваемом промежутку при $x = \frac{\sqrt{91}}{10}$, наибольшее значаение равно $\frac{109}{20}$, и это значение меньше, чем значение левой части в этой точке. Значит, других корней нет кроме x=0.

2. $a = \frac{10}{3}$

При $x = \pm 1$, $y = 0$

6 + 5 = 11

Получаем ещё два корня. Значит, это значение параметра не подходит.

Ответ: $\frac{4}{3}$

Заключение

В своей работе я изучила свойства чётных и нечётных функций, а также их применение при решении уравнений неравенств и их систем, самостоятельно составила более 10 десяти примеров на применение функциональных методов. Благодаря изученному материалу и проведённой работе, научилась решать сложные математические задания, встречающиеся в олимпиадах и среди задач высокого уровня ЕГЭ по математике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азаров А.И., Гладун О.М., Кремень Ю.А., Федосенко В.С. Алгебраические уравнения и неравенства: Учебное пособие. – Минск: ООО «Тривиум», 1997. – 128 с.
2. Шестаков С.А. ЕГЭ 2020. Математика. Задачи с параметром. Задача 18 (профильный уровень) / Под ред. И.В. Ященко. – М.: МЦНМО, 2020. – 288 с.
3. Решу ЕГЭ [Электронный ресурс] // URL: http://ege.sdamgia.ru
4. ALEXLARIN.NET [Электронный ресурс] // URL: https://alexlarin.net