НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Департамент общего образования Томской области
ОГБУ «Региональный центр развития образования»
АНО ДО «Детский технопарк «Кванториум»
Департамент образования администрации г. Томска
МБОУ лицей при ТПУ г. Томска

# С Б О Р Н И К   Т Р У Д О В

XXII Всероссийской конференции-конкурса
исследовательских работ старшеклассников
«Юные исследователи – науке и технике»

26 – 27 марта 2021 г.

Издательство
Томского политехнического университета
Томск 2021

**УДК 371.388.6(063)**
**ББК 74.202.7л0**
**Ю751**
Юные исследователи – науке и технике: сборник трудов XXII Всероссийской конференции-конкурса Исследовательских работ старшеклассников «Юные исследователи – науке и технике»; Томский политехнический университет. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2021

В сборнике трудов представлены материалы работ школьников.

Сборник представляет интерес для школьников, занимающихся исследовательской и проектной деятельностью.

В сборник включены статьи, представленные в Оргкомитет конференции и заслушанные на конференции.

# ВЕКТОРНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

***Кирсанов Александр, Белов Александр***

*Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение лицей при ТПУ г. Томска, 10 класс, г. Томск*

**Руководитель:** Букина Ольга Владимировна, учитель математики

Математическое образование, получаемое в общеобразовательной школе, является важнейшим компонентом общего образования и общей культуры современного человека.

Решению алгебраических задач в школе уделяется достаточно много внимания, так как современный человек, независимо от рода деятельности и уровня образования, должен уметь решать такие задачи.

Традиционным способом решения таких задач является аналитический. При решении алгебраических задач можно также использовать векторный метод.

Актуальность нашей работы определяется тем, что в настоящее время многие одиннадцатиклассники сдают единый государственный экзамен по профильной математике. В некоторых заданиях существует множество способов решения одних и тех же задач. Один вид удобнее решать одним методом, а другой другим. Но существуют такие примеры, которые тяжело решать классическими методами. Данная проблема, актуальна и для нас, так как через год мы также будем сдавать данный экзамен. Именно поэтому мы хотим представить альтернативный способ решения таких задач.

При изучении пяти учебников по алгебре 10-11 классов было обнаружено, что метод решения алгебраических задач с помощью векторов либо отсутствовал, либо был объяснен очень поверхностно. Таким образом проблема нашего исследования заключается в недостатке или отсутствии материала про метод решения алгебраических задач с помощью векторов в современных школьных учебниках.

**Цель исследования:** изучение способов решения алгебраических задач с помощью векторов.

**Задачи:**

1. Изучить основные действия над векторами, понятия и свойства их скалярного произведения.
2. Рассмотреть и классифицировать решения алгебраических уравнений с помощью свойств векторов.
3. Составить собственный сборник заданий для отработки решения задач данным методом.

Для решения алгебраических задач с помощью векторного метода, нам необходима следующая информация.

**Вектор**— направленный отрезок, то есть отрезок, для которого указано, какая из его граничных точек является началом, а какая — концом.

Вектор с началом в точке «А» и концом в точке «В» принято обозначать как $\overrightarrow{AB}$. Векторы также могут обозначаться малыми латинскими буквами $\vec{a}$.

**Длиной вектора** называют длину направленного отрезка и обозначают$|\vec{a}|$. Ее можно выразить через координаты вектора $\vec{a}\{x; y; z\}$ как

$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Два вектора называются коллинеарными, если они лежат на параллельных прямых, либо на одной прямой.

Два вектора называются сонаправленными, если они коллинеарные и направлены в одну сторону ($\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{\mathrm{b}}$), противоположно направленными ( $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{\mathrm{b}}$ ), если коллинеарные и направлены в разные стороны.

Для коллинеарности вектора $\vec{a}$ ненулевому вектору $\vec{\mathrm{b}}$ необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число $\lambda$, что $\vec{a} = \lambda\vec{b}$, где -некоторое число.

Отсюда следует условие коллинеарности векторов $\vec{a}\{x_1;\ y_1\}$ и$\vec{\mathrm{b}}\{x_2; y_2\}$ на плоскости:$\vec{a}$коллинеарен$\vec{\mathrm{b}} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \lambda x_2 \\ y_1 = \lambda y_2 \end{cases}$;

и векторов$\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{\mathrm{b}}\ \{x_2; y_2; z_2\}$в пространстве:

$\vec{a}$коллинеарен $\vec{\mathrm{b}} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \lambda x_2; \\ y_1 = \lambda y_2; \\ z_1 = \lambda z_2. \end{cases}$

Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi.$$

Если векторы заданы координатами: $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$;$\vec{\mathrm{b}}\ \{x_2; y_2; z_2\}$, то скалярное произведение векторов вычисляется по формуле

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Скалярное произведение векторов не может быть больше произведения их длин.

Причем, знак равенства достигается тогда и только тогда, когда векторы коллинеарные. Значит, если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{\mathrm{b}}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$;если$\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{\mathrm{b}}$,

То $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

При составлении комплекса задач, решаемых с помощью векторов, было выяснено, какие уравнения подходят для решения данным методом.

- Если уравнение содержит алгебраическое выражение вида $\sqrt{x^2 + y^2}$ или $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, - то данный корень может быть представлен как длина некоторого вектора $\vec{a}\{x; y\}$на плоскости или $\vec{a}\{x; y; z\}$в пространстве.
- Если уравнение содержит алгебраическое выражение вида $x_1x_2 + y_1y_2$ или $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$ , то данное выражениеможно считать скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на плоскости или в пространстве.
- Если левую часть уравнения можно представить скалярным произведением некоторых векторов, а правую часть - произведением их длин.

Таким образом, мы рассмотрели применение векторов в следующих задачах.

1. **Решение иррациональных уравнений:**

Пример1. $\sqrt{\boldsymbol{x^2+4x+13}}+\sqrt{\boldsymbol{x^2-8x+25}}=\boldsymbol{6\sqrt{2}}$**;**

$\sqrt{(x+2)^2+3^2}+\sqrt{(x-4)^2+3^2}=6\sqrt{2}$.

Пусть:$\vec{a}\{\,x+2;3\}$, $\vec{b}\{4-x;\,3\}$.

Тогда $|\vec{a}|$=$\sqrt{x^2+4x+13}$ , а $|\vec{b}|$=$\sqrt{(x-4)^2+3^2}$.

Рассмотрим вектор $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$, координаты которого $\vec{c}\{\,6;6\}$, а длина $|\vec{c}|=\sqrt{36+36}=6\sqrt{2}$.

Уравнение приобретает вид$|\vec{c}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$,$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$, значит,$\vec{a}$ коллениарен $\vec{c}$ , и их координаты пропорциональны.

$$\frac{x+2}{6}=\frac{3}{6};$$

$x$=1.

Проверка: $\sqrt{9+9}+\sqrt{9+9}=6\sqrt{2};\ 6\sqrt{2}=6\sqrt{2}\Rightarrow x$=1 – корень уравнения.

Ответ: 1

Пример2.$\boldsymbol{3\sqrt{x+2}+\sqrt{4-x}=2\sqrt{15}}$**.**

Запишем координаты векторов:

$\vec{a}\{3;1\}$; $\vec{b}\{\sqrt{x+2}\ ;\sqrt{4-x}\}$.

По условию, скалярное произведение этих векторов: $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\sqrt{15}$.

Если $\varphi$– угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то справедливо $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot cos\,\varphi$ = $2\sqrt{15}$.

$$\cos\varphi=\frac{2\sqrt{15}}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{15}}{2\sqrt{15}}=1.$$

Так как $\cos\varphi$= 1, то $\varphi$= 0° , следовательно, векторы коллинеарны, а их координаты пропорциональны.

$$\frac{3}{\sqrt{x+2}}=\frac{1}{\sqrt{4-x}};$$

$3\sqrt{4-x}=\sqrt{x+2};$

$9(4-x)=x+2;$

$$x=\frac{17}{5}.$$

Проверка:

$3 \cdot \sqrt{\frac{17}{5} + 2} + \sqrt{4 - \frac{17}{5}} = 2\sqrt{15}; \quad 2\sqrt{15} = 2\sqrt{15}.$

Ответ: $\frac{17}{5}$.

**2. Решение тригонометрических уравнений:**

Пример 3. $\mathbf{\sin x + \sqrt{3} \cos x = 1}$.

Разделим обе части уравнения на 2 и запишем уравнение в таком виде:

$-\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x = \frac{1}{2}$.

Пусть $\vec{a}\{\cos x; \sin x\}$; $\vec{b}\{-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\}$.

Тогда $|\vec{a}| = \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x} = \sqrt{1} = 1$,

$\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x = \frac{1}{2}$ .

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi = 1 \cdot 1 \cdot \cos\varphi = \cos\varphi$.

Приравняем правые части выражений, получаем $\cos\varphi = \frac{1}{2}$ .

Значит, угол между векторами $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

Отложим в прямоугольной системе координат вектор $\vec{b}$. Так как вектор $\vec{b}$ образует с осью абсцисс угол $\frac{5\pi}{6}$, вектор $\vec{a}$ получается поворотом на $\frac{\pi}{3}$ вектора $\vec{b}$ по часовой стрелке или против нее. Поэтому х $= \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ и

х $= -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\{\frac{\pi}{2} + 2\pi n\}, \left\{-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right\}, n \in \mathbb{Z}$.

**3. Нахождение минимального значения:**

Пример 4. Найти наименьшее значение функции

$$\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 7} + \sqrt{x^2 - 2\sqrt{3}x + 7}.}$$

$f(x) = \sqrt{(x-2)^2 + \sqrt{3}^2} + \sqrt{\left(\sqrt{3} - x\right)^2 + 2^2}$.

Пусть $\vec{a}\{x - 2; \sqrt{3}\}$, $\vec{b}\{\sqrt{3} - x; 2\}$, $|\vec{a}| = \sqrt{(x-2)^2 + 3^2}$; $|\vec{b}| = \sqrt{\left(\sqrt{3} - x\right)^2 + 2^2}$ .

Тогда $f(x) = |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

Так как $|\vec{a}| + |\vec{b}| \geq |\vec{a} + \vec{b}|, \Rightarrow$ минимальное значение $f(x)$=$|\vec{a} + \vec{b}|$.

$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{14}$.

Ответ:$\sqrt{14}$.

**Вывод.** Примененный нами векторный метод показывает новый, нетрадиционный подход к решению алгебраических задач. В данной работе мы разобрали различные примеры заданий, которые удобно решать векторным методом и составили сборник для отработки решения задач данным методом. Мы получили много новых знаний, разобрали и решили реальные задачи ЕГЭ по математике. Мы думаем, что материалы этой работы смогут использовать наши сверстники для более глубокой подготовки к экзаменам и олимпиадам.

## ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ ПРИ РЕШЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

***Беляева Александра***

*Муниципальное автономное общеобразовательное учреждение «Ангарский лицей №2 им. М.К. Янгеля», 11 класс, г. Ангарск*

**Руководитель**: Шишмарева Тамара Алексеевна, учитель математики

**Цель работы:** изучить класс комплексных чисел и их применением при решении геометрических задач.

**Задачи:** ознакомиться с понятием комплексных чисел, способы их задания; рассмотреть свойства комплексных чисел; показать применение комплексных чисел при решении задач.

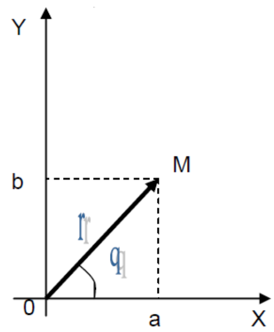
**Гипотеза:** комплексные числа - математическая модель для описания и решения задач, неразрешимых на поле действительных чисел.

**Актуальность:** при решении задач по математике многие уравнения считались нерешаемыми без введения множества комплексных чисел.

**Проблема:** найти способ решения алгебраических и геометрических задач на поле действительных чисел.

**История появления комплексных чисел.** В XIII веке стали извлекать квадратные корни из положительных чисел и установили, что с числами отрицательными эта операция невозможна. Но в XVI веке в связи с изучением кубических уравнений математики столкнулись с проблемой: оказалось необходимым извлекать квадратные корни из отрицательных чисел. Уравнение $x^3 + 3x - 4 = 0$ должно иметь три корня. При его решении часто под знаком квадратного корня оказывалось отрицательное число. Получалось, что путь к этим корням ведет через невозможную операцию извлечения квадратного корня из отрицательного числа. Чтобы объяснить получившийся парадокс, итальянский алгебраист Джироламо Кардано в 1545 г. предложил ввести числа новой природы. Он показал, что система уравнений x + y = 10, xy = 40, не имеющая решений во множестве действительных чисел, имеет решение всегда $x = 5 \pm \sqrt{-15}$, $y = 5 \pm \sqrt{-15}$, нужно только условиться действовать над такими выражениями по правилам обычной алгебры и считать, что $\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-a} = -a$.

Кардано называл такие величины «чисто отрицательными» .Однако уже в 1572 году Р. Бомбелли выпустил книгу, в которой были установлены первые правила арифметических операций над такими числами. Название «мнимые числа» в 1637 году было введено французским математиком и философом Р. Декартом.А в 1777 году один из крупнейших алгебраистов XVIII века - Л.Эйлер - предложил использовать первую букву французского слова imaginaire (мнимый) для обозначения числа $i = \sqrt{-1}$ .символ вошел во всеобщее употребление благодаря К. Гауссу. Термин “комплексные числа” также был введен Гауссом в 1831 году. Слово комплекс (от латинского complexus) означает связь, сочетание, совокупность понятий, предметов, явлений и т. д., образующих единое целое. Большой вклад в развитие теории функций комплексной переменной внесли русские и советские ученые: Р. И. Мусхелишвили занимался ее приложениями к теории упругости, М. В. Келдыш и М. А. Лаврентьев – к аэродинамике и гидродинамике, Н. Н. Боголюбов и В. С. Владимиров – к проблемам квантовой теории поля.




**Формы записи**

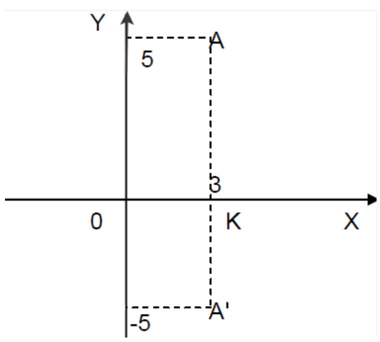
1) Алгебраическая: z=a+bi, где a – действительная часть числа, b – мнимая часть числа, i – мнимая единица, то есть $i^2=-1$. Например: 4+2i

Комплексное число называется чисто мнимым, если a=0

Комплексное число называется действительным, если b=0

2) Геометрическая. Комплексные числа можно изобразить в декартовой системе координат в виде точки. При этом абсцисса будет равна действительной части числа, а ордината мнимой. То есть x=a, y=b.

Сопряжённые комплексные числа изображаются парой точек, симметричных относительно оси абсцисс.




Комплексное число можно изображать также отрезком или радиус-вектором, начинающимися в точке O и оканчивающимися в соответствующей точке числовой плоскости.
Стало ясно, что комплексные числа полезны во многих вопросах, где имеют дело с величинами, которые изображаются векторами на плоскости (при изучении течения жидкости, задач теории упругости).

3) Тригонометрическая:

z=r(cos(q)+i sin(q)) где r – модуль комплексного числа, равный длине вектора комплексного числа(т.е. $|a+bi|=\sqrt{a2 + b2}$), а q – аргумент комплексного числа (угол между вектором комплексного числа и осью абсцисс).

**Действия над комплексными числами**

1) Сравнение. a + bi = c + di означает, что a = c и b = d (два комплексных числа равны между собой, когда равны их действительные и мнимые части).

2) Сложение. Суммой комплексных чисел a + bi и c + di называют комплексное число (a +c) + (b+d)i. Это определение подсказывается правилами действий с обычными многочленами.

Пример1: (-3 + 5i) + (4- 8i) =1 - 3i.

Пример2: (2 + 0i) + (7 + 0i) =9 + 0i. Так как запись 2 + 0i обозначает то же, что и 2 наполненное действие согласуется с обычной арифметикой (2 + 7=9).

Для комплексных чисел справедливы переместительный и сочетательный законы сложения. Их справедливость следует из того, что сложение комплексных чисел по существу сводится к сложению действительных частей и коэффициентов мнимых частей, а они являются действительными числами, для которых справедливы указанные законы.

Так же сложению комплексных чисел соответствует сложению их радиус-векторов;

3) Вычитание. Разностью комплексных чисел a + bi и c + di называется комплексное число (a- c) + (b- d)i

Пример 1. (-5 + 2i) - (3- 5i) = -8 + 7i

4) Умножение. Произведением комплексных чисел a+ bi и c + di называется комплексное число (ac – bd) + (ad + bc)i

Можно перемножить данные числа, как двучлены, а затем положить, что $i^2 = -1$

Пример. $(1 - 2i)(3 + 2i)=3 - 6i + 2i - 4i^2 =3 - 6i + 2i + = 7- 4i$.

Так же есть тригонометрическая форма произведения:

$z \cdot z_1=|z| \cdot |z_1| \cdot (\cos(\alpha+\beta)+i \sin(\alpha+\beta))$

5) Деление. Чтобы разделить комплексное число a+bi на комплексное число a' + b'i необходимо найти такое число x+yi, которое в произведении с a'+b' даст a+ bi

Конкретное правило деления получим, записав частное в виде дроби и умножив числитель и знаменатель этой дроби на число, сопряжённое со знаменателем

$$\frac{\mathrm{a} + \mathrm{bi}}{c + d\mathrm{i}} = \frac{(\mathrm{a} + \mathrm{bi})(c - d\mathrm{i})}{(c + d\mathrm{i})(c - d\mathrm{i})} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$$

Пример. Найти частное (7 - 4i) / (3 + 2i).

Записав дробь (7- 4i)/(3 + 2i), домножаем её числитель и знаменатель на число 3 – 2i, сопряженное с 3 + 2i.

$$\frac{7-4\mathrm{i}}{3+2\mathrm{i}}=\frac{(7-4\mathrm{i})(3-2\mathrm{i})}{(3+2\mathrm{i})(3-2\mathrm{i})}=\frac{13-26i}{13}=1-2i$$

6) Возведение в степень. В 1748 году вывели формулу: $e^{ix}=\cos x+i\sin x$, которая связывала воедино показательную функцию с тригонометрической. С помощью формулы Л. Эйлера можно было возводить число е в любую комплексную степень, например, что $e^{i\pi}=-1$. Таким образом можно находить синус и косинус от комплексных чисел, вычислять логарифмы таких чисел, то есть строить теорию функций комплексного переменного.С помощью формулы Муавра выводится формула извлечения корня из комплексного числа.
7) Сопряжение. Число $\bar{z}$ называется сопряженным числу z, если его мнимая часть имеет противоположный знак. То есть если z=a+bi, то $\bar{z}$=a-bi

$$z\cdot\bar{z}=a^2+b^2=|z^2|$$

**Свойства комплексных чисел**

1) Каждое алгебраическое уравнение степени n имеетв множестве комплексных чисел ровно n-корней, причем парных по сопряжению. Если n не четное, то хотя бы одним из корней будет действительное число (из этого следует: каждое алгебраическое уравнение имеет в множестве комплексных чисел по крайне мере один корень)
2) Результатом умножения вектора на мнимую единицу i является поворот этого вектора в положительном направлении (против часовой стрелки) на 90° без изменения его длины (при умножении на –i он повернется на -90°)
3) Сумма и разность двух сопряженных чисел является число действительное.
4) Число, сопряженное сумме двух комплексных чисел, равно сумме сопряженных данным числам. (то же относится к вычитанию, умножению, делению, возведению в степень)
5)$i^{4n}=1$ $i^{4n+1}=i$$i^{4n+2}=-1$ $i^{4n+3}=-i$
6) Ноль является одновременно и действительным и чисто мнимым числом.
7) Отрезки перпендикулярны тогда и только тогда, когда отношением их векторов точек с комплексными координатами является число чисто мнимое.
Т.е. AB⊥CD если результатом $\frac{a-b}{c-d}$ будет чисто мнимое число.
8) Комплексные корни квадратного уравнения обладают такими же свойствами, как и известные нам свойства действительных корней: Виета, формула разложения на множители и т.д.

**Решение задач на множестве комплексных чисел.**

Задача 1.

$2x^2 -2x + 13 = 0.$
$D = b^2-4ac$
$D = 4 – 4\cdot 2\cdot 13 = – 100 <0$

$$\sqrt{D}=\sqrt{-100}=\sqrt{-1*100}=10i$$

$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$, $x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$

$x_1=\frac{2+10i}{2}=1+5i$

$x_2=\frac{2-10i}{2}=1-5i$

Ответ: 1-5i, 1+5i

Задача 2.
Дан квадрат ABCD и координаты a и b его вершин A и B. Найдите координаты вершин C и D (при произвольном выборе нулевой точки O).

| **Дано:**<br>ABCD – квадрат<br>A(a); B(b)<br>**Найти:**<br>C(x); D(y) -? | **Решение**<br>Пусть P - центр квадрата.<br>Обозначим через z комплексную координату точки P.<br>Вектор PA при повороте на 90 градусов переходит в PB,<br>а повороту на этот угол соответствует умножение координат вектора на i. |
|---|---|

Отсюда $b-z=i(a-z)$,

то есть $z=\frac{b-ia}{1-i}=\frac{1}{2}(1+i)(b-ia)=\frac{1}{2}(a+b+i(b-a))$

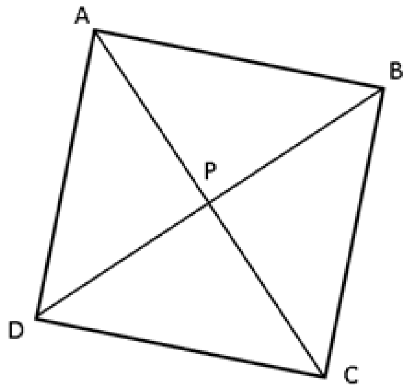
Центр квадрата делит диагонали пополам,

из этого следует $z=\frac{a+c}{2}$ и $z=\frac{b+d}{2}$

Решив уравнение $\frac{1}{2}(a+b+i(b-a))=\frac{a+c}{2}$ и $\frac{1}{2}(a+b+i(b-a))=\frac{b+d}{2}$

найдем координаты $c=b+i(b-a)$, и $d=a+i(b-a)$.

**Ответ:** $c=b+i(b-a)$; $d=a+i(b-a)$.




**Заключение и выводы**

Я познакомилась с множеством комплексных чисел, их свойствами, способами задания, действиями над ними. Рассмотрела применение комплексных чисел в геометрии, что значительно мне поможет в дальнейшей учебе .Я узнала, что комплексные числа имеют очень широкое применение, играют значительную роль не только в математике, а также в других науках .Именно поэтому нам надо расширять свои знания о комплексных числах, их свойствах и особенностях с возможным введением их в школьную программу для упрощения решения некоторых задач. Я достигла поставленной цели.

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ ГРАФИЧЕСКИМ СПОСОБОМ

***Бердникова Екатерина***

*Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение лицей при ТПУ г. Томска,, 10 класс, г. Томск*

**Руководитель:** Беленкова Наталья Павловна, учитель математики

Существует множество способов решать математические задачи. В школе мы проходим далеко не все. Новые методы помогают ускорить решение. Тема моего проекта основывается на выведении уравнений фигур на плоскости для решения различных геометрических задач изадач с параметрами графическим способом. Актуальность этой темы заключается в получении возможности расширения круга решаемых задач, включая задачи с параметром, т.к. графическая интерпретация часто помогает понять задачу, упрощает поиск идеи решения и позволяет вполне обоснованно получить ответ.

Цель моей работы заключается в выведении уравнений фигур, приведение их к каноническому виду, зная уравнения простейших фигур, которые изучены в школьном курсе, методом преобразования графиков функций. С помощью выведенных формул научиться решать задачи с параметром, в том числе задания ЕГЭ графическим способом.

Для выведения формул я использовала различные преобразования графиков функций, которые изучаются в школьной программе. Также я рассматривала графики с модулями. Анализируя полученные графики и проделанные мной преобразования, я выводила общее уравнение для фигуры. Рассмотрим пример нахождения уравнения квадрата, ромба и параллелограмма.

В результате преобразований у меня получились следующие уравнения:

Общее уравнение квадрата: $|x+a|+|y+b|=d/2$, где d диагональ квадрата, $a, b \in R$.

Общее уравнение ромба: $c|x+a|+e|y+b|=f$, где $c, e \in R \setminus \{0\}$; $a, b \in R$; $f \in R$.

Общее уравнение параллелограмма: $m|a_1x+b_1y+c_1|+n|a_2x+b_2y+c_2|=d$, где

$\frac{a1}{b1} \neq \frac{a2}{b2}$, так как если они будут равны, то получится ромб.

Получив эти уравнения, я смогла решить задачу с параметрами графическим способом. Это решение оказалось понятнее и легче, чем аналитическое решение.

Конечно, при использовании графических методов обязательно надо помнить о строгости, т.е. обоснованности решения. Если в решении есть какие-либо сомнения, их необходимо проверить аналитически.

## ОДНА КРАСИВАЯ ТЕОРЕМА ПЛАНИМЕТРИИ

***Борздун Анна***

*Муниципальное бюджетное нетиповое общеобразовательное учреждение «Городской классический лицей», г. Кемерово*

**Руководитель**: Борздун Ольга Владимировна

Люди знакомы с множеством теорем из курса геометрии, как теорема Пифагора, теорема Виета, теорема косинусов и синусов и т.д. Но вы когда-нибудь слышали о теореме с красивым названием "Теорема о бабочке"?

Теорема о бабочке является классической теоремой из курса планиметрии, автором которой является Уильям Джордж Горнер.

**Гипотеза:** изучение нескольких способов доказательства одного геометрического факта позволит глубже понять предлагаемую конструкцию.

**Объект исследования:** теорема о бабочке

**Предмет исследования:** свойства «бабочки», а также задачи с ее применением.

**Цель работы.** Изучение теоремы о бабочке, ее применение при решении задач.

**Задачи:**

1. Познакомиться с историей данной теоремы
2. Рассмотреть несколько способов доказательств данной теоремы
3. Подобрать задачи, использующие в решение теорему о бабочке
4. Освоить чертёжную программу Geogebra.

**Актуальность темы:**

1. Данная тема является дополнением изученных в курсе геометрии свойств.

2. Применение опыта решения планиметрических задач с использованием теоремы о бабочке помогает повысить уровень логической культуры.

3. Изучение данной темы поможет подготовиться к успешному участию в математических конкурсах и олимпиадах.

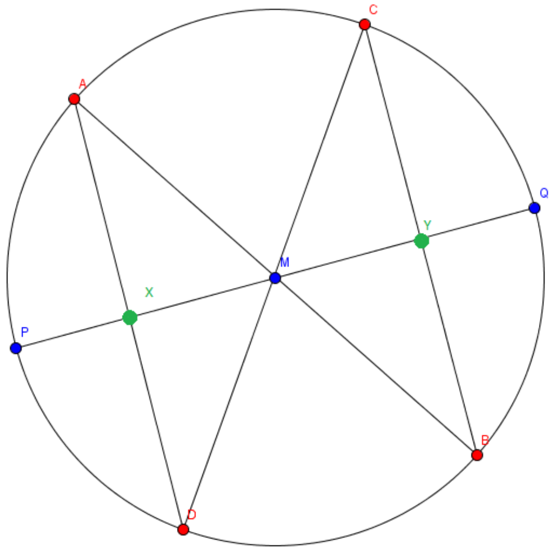
Автором теоремы о бабочке является Уильям Джордж Горнер (1786-1837) - британский математик, известный по схеме Горнера.

Впервые она появилась на страницах журнала *Gentleman'sDiary*в 1815 году, вызвав массу эмоций и доказательств. С этих пор было опубликовано очень много работ, посвященной теореме о бабочке, и удивительно, что их количество велико до сих пор. Теорема о бабочке имеет множество доказательств и различных обобщений.

Свое красивое название  теорема получила публикации 1944 года в журнале *AmericanMonthly*. Название оказалось таким удачным, что его используют и по сей день.

## Формулировка теоремы

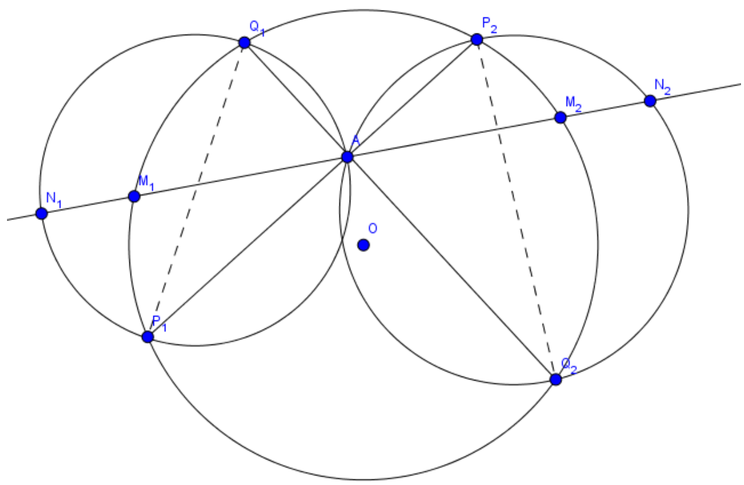
Пусть точка $\boldsymbol{M}$ – середина хорды окружности $\boldsymbol{PQ}$. Проведем через $\boldsymbol{M}$ две другие хорды: $\boldsymbol{AB}$ и $\boldsymbol{CD}$. Хорда $\boldsymbol{AD}$ пересечет $\boldsymbol{PQ}$ в точке $\boldsymbol{X}$, а $\boldsymbol{BC}$ пересечет $\boldsymbol{PQ}$ в точке $\boldsymbol{Y}$. Тогда точка $\boldsymbol{M}$ является серединой отрезка $\boldsymbol{XY}$.




## Задачи и их решения

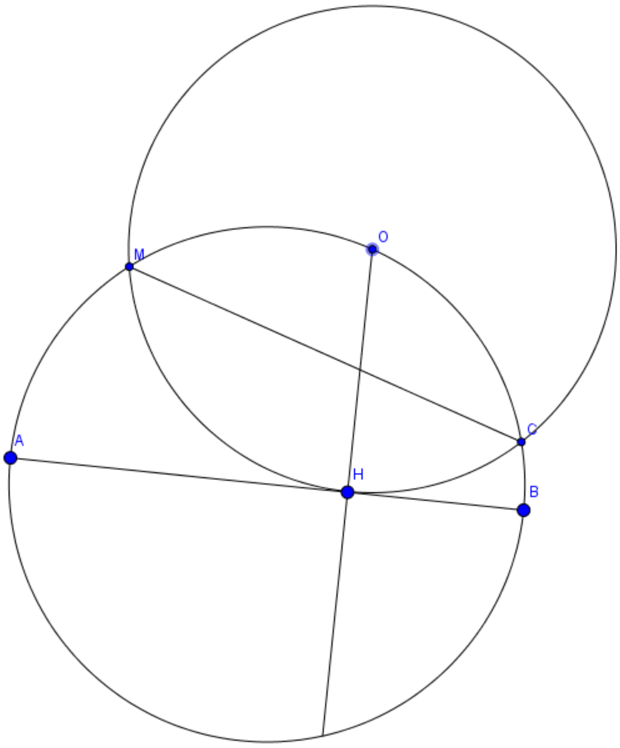
**Задача 1[1, с.36]:** Через точку А, не лежащую на окружности, проведены две прямые, пересекающие эту окружность, одна – в точках $P_1$, $P_2$, другая в точках $Q_1$,$Q_2$. Произвольная прямая, проходящая через точку А, пересекает окружность в точках $M_1$,$M_2$, а описанные окружности треугольников $AP_1Q_1$ и $AP_2Q_2$ – в точках $N_1$, $N_2$ следовательно. Докажите, что $M_1N_1=M_2N_2$.

**Решение** Пусть О – центр данной окружности. Он лежит на пересечении серединных перпендикуляров к отрезкам $P_1P_2$ и $Q_1Q_2$, поэтому он является точкой двух велосипедистов для окружностей $AP_1Q_1$ и$AP_2Q_2$. Значит, какую бы прямую ни провести через А, точка О будет лежать на серединном перпендикуляре к отрезку $N_1N_2$. Но, с другой стороны, О лежит на серединном перпендикуляре к хорде $M_1M_2$. Следовательно, отрезки $N_1N_2$ и $M_1M_2$ имеют общую середину, что означает равенство $M_1N_1=M_2N_2$.




**Задача 2:[2, с.42]** Пусть Q – произвольная точка окружности с диаметром АВ, QH – перпендикуляр, опущенный на АВ. Точки С и М – это точки

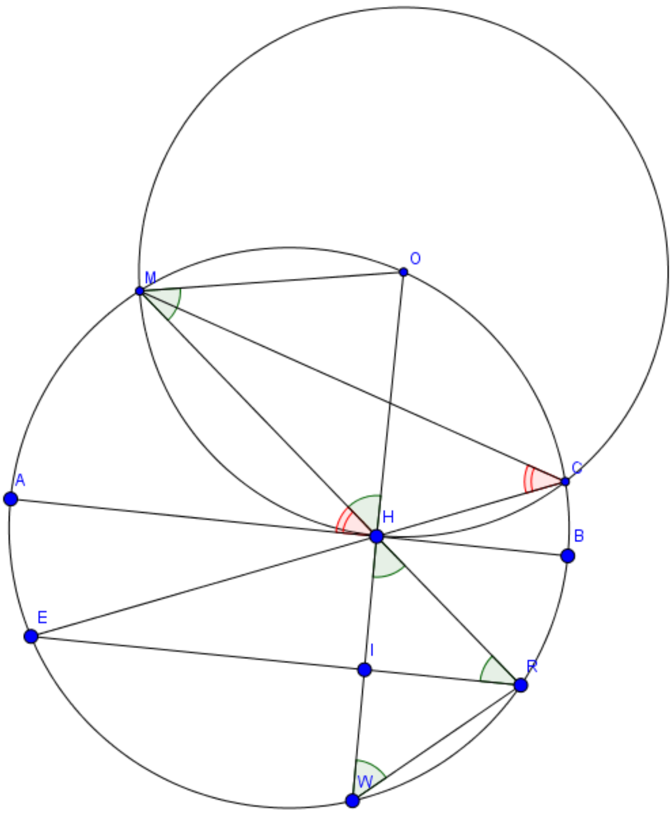
пересечения окружности с центром Q и радиусом QH с первой окружностью. Докажите, что прямая CM делит радиус QH пополам.




**Решение:**

Продлим CH и MH до пересечения окружностью.

Заметим, что ∠OMH = ∠MHO, ибо треугольник MOH равнобедренный (OM=OH - радиусы),∠OHM = ∠RHW, как вертикальные, да еще и ∠RMO = ∠OWR, потому что опирается на дугу OR. Поэтому треугольник HRW также равнобедренный. С другой стороны, ∠MCH = ∠MHA, так как оба опираются на дугу MH, ∠MCE =∠MRE, так как опираются на дугу ME, откуда заключаем, что ∠MHA=∠HRE, следовательно AB|| ER. Но так, как радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной, т.е. OH перпендикулярен AB, но как, мы только что показали AB|| ER, тогда ER перпендикулярен OW. Другими словами, IR является высотой в равнобедренном треугольнике HRW, а по сему совпадает с медианой, из чего следует, что HI = IW. Осталось заметить, что H является серединой хорды OW (AB – диаметр, AB перпендикулярен OW) и применить «теорему о бабочке».




## Заключение

Изучение нескольких способов доказательства одного геометрического факта позволило нам глубже понять предлагаемую конструкцию теоремы о бабочке.

Треугольники, эмитирующие крылья бабочки, во всех рассмотренных случаях (независимо от выбора расположения хорд), подобны, это видно из полученных отношений сторон, периметров и площадей.

Сравнение длины окружности с периметрами полученных треугольников, а также площади круга с площадями полученных треугольников, не дали ни каких результатов.

В ходе выполнения работы мы познакомились: с историей теоремы, рассмотрели несколько способов доказательств данной теоремы, подобрали задачи, использующие в решение теорему о бабочке, освоили чертёжную программу Geogebra, провели исследование «крылььев бабочки»

## ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОВ ХЕШ-ФУНКЦИЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ЖИЗНИ

***Вторушин Артём***

*Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение лицей при ТПУ г. Томска, 10 класс, г. Томск*

**Руководитель**: Воротов Вячеслав Евгеньевич, учитель информатики

Сегодня математика - это наука, которая окружает нас повсюду в повседневной жизни, и часто мы даже не задумываемся об этом. Мы постоянно используем её теоремы, сталкиваемся с вычислениями и формулами.

Математическое понятие функции связано с определением одного числа другим. Так, например, значение переменной в математическом выражении однозначно определяет значение самого выражения.
Часто под термином функция понимается именно соотношение чисел. Эти функции удобно представлять в виде графиков. Но не все функции являются числовыми, это может быть соотнесение букв, слов и даже целых предложений. Хэш-функция это такая функция, которая отображает данные произвольного размера в виде, например, числовой строки определённого фиксированного размера. То, что получается после использования хеш-функцией, называется хеш-значениями (хешами).

Я считаю, что людям необходимо понимать, что это такое и как это работает, потому что мы постоянно сталкиваемся с этим (при работе с браузером, переводчиком, текстовым редактором, при использовании криптографии, которая также окружает нас почти везде), а материалов по данной тематике, в особенности на простом для понимания языке, немного, поэтому, считаю свой исследовательский проект ***актуальным.***
А ***практическая значимость*** моего исследования заключается в том, что почти любой желающий сможет разобраться в нем, используя мои материалы исследования.

В ходе проведения данного исследования я выполнил поставленные мной *задачи*: выяснил назначение и принцип работы хеш-функций, установил тесную зависимость информатики от математики в этой области, исследовал несколько алгоритмов хеширования и провел их анализ, выявив наиболее полезные,и нашел им практическое применение в повседневной жизни.

Мной были рассмотрены следующие виды хеширования. Одним из самых простых и распространенных на практике методов является ***метод деления по модулю***. Его суть заключается в том, что некоторое число $x$ разбивается на отрезки длиной $M$, а затем эти числа в этих отрезках складываются по модулю этого числа $M$. Проведя небольшой эксперимент, вручную просчитав некоторое количество таких чисел, пришел к выводу, **что** $M$ надо выбирать простым числом.

После я рассмотрел хеширование методом *среднего квадрата*. Метод среднего квадрата неплохо работает, когда ключи с целыми значениями равновероятны. Однако, поскольку он рассматривает только подмножество цифр в середине числа, входные данные, которые имеют большое количество начальных нулей, которыми число дополняется до нужной длины, если его длины недостаточно, будут конфликтовать. Метод умножения - это очень простой вариант метода среднего квадрата, который устраняет его недостатки и который также был мной рассмотрен - это так называемый *метод хеширования умножения* . Здесь мы умножаем ключ на тщательно выбранную константу $a$ , а затем извлекаем из результата средние цифры.

И, наконец, *хеширование Фибоначчи*. Название происходит о того что, что оно связано с золотым сечением, которое в свою очередь связано с числами Фибоначчи. Фактически хеширование Фибоначчи - это метод хешированияумножения, где константа $a$ связана счислом, как раз и называемом числом золотого сечения (приблизительное значение Ф = 1,618).Помимо них были рассмотрены ещё несколько других методов.

Я вручную проанализировал каждый из методов, сравнив их между собой и выявив необходимые мне свойства (такие как единообразие, универсанольность, детерминированность и др.), выяснил их принцип действия, слабые и сильные стороны, составил наглядные схемы их работы для лучшего понимания процесса и попробовал применить их в жизни для подтверждения подлинности и оригинальности информации, для чего собственно они и разрабатывались.

Я считаю, что я проделал очень интересную и полезную работу, а перспективы дальнейшего исследования проблемы я вижу в более детальном изучении других методов хеширования, а исследования в этом направлении могут быть продолжены другими исследователями, опирающимися на мои результаты.

## ВЫБОР ХОДА ПРИ АВТОМАТИЧЕСКОЙ ИГРЕ В ТЕТРИС

***Малых Андрей***

*Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение Гимназия №25 города Иркутска, 11 класс, г. Иркутск*

*Муниципальное бюджетное учреждение дополнительного образования города Иркутска "Центр детского технического творчества"*

**Руководитель**: Рейнгольд Григорий Борисович, педагог. доп. образования в.к.к. МБУДО г. Иркутска ЦДТТ

Тетрис, несмотря на простоту и возраст более тридцати пяти лет, до сих пор остается весьма популярной игрой. Эта головоломка очень полезна, так как помогает развить способность быстро принимать ответственные решения в напряженных условиях. Если результативность автоматического игрока взять за эталон, то, сопоставляя его с людьми, можно определить, насколько эффективно играет человек в сравнении с программой, а также, чем отличается мышление человека при выборе хода от работы алгоритма. Автор данной работы заинтересовался тетрисом, особенно проблемой выбора хода. Было решено с помощью самостоятельно сделанной компьютерной программы реализовать автоматическую игру.

**Гипотезы**:

1. Наиболее важный критерий при выборе хода – это количество заполненных клеток на игровом поле.
2. Автоматический игрок получает результаты лучше, чем у человеческого.

**Цельработы**: с помощью компьютерной программы провести исследование проблемы выбора хода при автоматической игре.

**Задачи**:

1. Провести библиографический поиск по данной проблеме.
2. Разработать алгоритм автоматической игры и критерии выбора хода.
3. Написать и отладить программу.
4. Поставить ряд экспериментов с целью нахождения лучшей стратегии.

## Обзор аналогов

Первоначальная информация о данной игре (математической головоломке) получена в [1]. Игра была создана в 1984 году нашим соотечественников Алексеем Пажитным. Слово Тетрис образовано от 2-х слов «тетрамино» и «теннис». Тетрамино это частный случай полимино [2]. Стандартный тетрис предполагает «стакан» размером 10х20.

Много ценной информации нашлось в статье «Nintendo Tetris AI Revisited» [3]. Здесь описывается создание алгоритма автоматической игры в тетрис для NES (Nintendo EntertainmentSystem). Автор использует готовую игру тетрис для NES, а не пишет свою. Этот алгоритм исследует все возможные способы добавление двух тетрамино на игровое поле и оценивает их эффективность. В отличие от моего алгоритма, для перебора вариантов размещений тетрамино используется поиск в ширину, а не в глубину. Игровому полю, полученному в результате установки фигуры, оценочная функция присваивает значение — взвешенную сумму различных влияющих параметров.

Игровое поле оценивается умножением параметров на соответствующие им веса и сложением результатов. Чем ниже значение, тем лучше решение. Поскольку все параметры и веса имеют положительные значения, то все параметры вредят общей оценке; каждый из них необходимо минимизировать. Также это означает, что наилучшая оценка равна 0.

Используются следующие параметры:

- **Общее количество очищенных рядов**
- **Общая высота установки**
- **Общее количество ячеек-«колодцев»**: ячейка-колодец — это пустая ячейка, расположенная над всеми занятыми ячейками в столбце так, что её левый и правый сосед являются занятыми ячейками
- **Общее количество отверстий в столбцах**: отверстие в столбце — это пустая ячейка, расположенная непосредственно под занятой ячейкой. Пол игрового поля не сравнивается с ячейкой над ним. В пустых столбцах отверстий нет.
- **Общее количество переходов в столбцах и строках**: переход — это пустая ячейка, соседствующая с занятой ячейкой (или наоборот) в пределах одного столбца или строки.

Параметры распределены в порядке нарастания вредности для положения: наименее вредящий параметр — это общее количество очищенных рядов, затем идёт общая высота установки, общее количество ячеек-колодцев, общее количество переходов в столбцах и строках. Основную стратегию, можно вкратце описать так: упаковывать фигуры как можно более близко друг к другу.

В результате экспериментов, автор статьи приходит к выводу, что существуют патологические последовательности, которые способны привести к поражению вне зависимости от стратегии. Простейший пример — это бесконечная последовательность тетрамино S и Z.

Оценочная функция представляет из себя улучшенную версию алгоритма Пьера Деллачери [4].

Таким образом, в отличие от автора данной статьи, который пользуется готовым тетрисом для NES, в процессе работы мною была создана своя версия игры тетрис, которая выступает в качестве системы для экспериментов. В моей работе по-другому оценивается положение в «стакане», так как, во-первых, используются иные параметры, а, во-вторых, программа ищет способ, как наилучшим образом разместить одно тетрамино за раз, а не два. Также отличается алгоритм перебора всех возможных положений, так как для этого осуществляется поиск в глубину, а не в ширину. Моя программа работает с полем абстрактных размеров, а не только со стандартным полем 10x20.

В схожих работах рассматривается создание алгоритма автоматической игры для тетриса, но не проводится достаточного количества экспериментов, позволяющих установить взаимосвязь между различными показателями эффективности хода, выбранная стратегия не обосновывается и не подкрепляется исследованиями, что мешает понять является ли она наиболее выигрышной.

Исходя из вышесказанного, можно сказать, что данная работа имеет признаки оригинальности.

## Алгоритм поиска хода

Для того, чтобы исследовать данную проблему был разработан алгоритм поиска хода.

Алгоритм выполняет следующие шаги:

Пользователь вводит приоритет показателей эффективности конечного положения. Первый показатель – количество заполненных клеток в стакане. Второй показатель – изменение количества пустот в стакане после установки тетрамино. Третий показатель – y-координата самой высокой заполненной клетки в массиве.

Если расстояние от тетрамино до самой высокой заполненной клетки более двух клеток, то фигура опускается ближе ко дну стакана и в цепочку ходов записываются ходы №2 (Движение фигуры вниз), приводящие к этому положению. Это необходимо для сокращения времени на поиск конечных положений.

Запускается алгоритм перебора конечных положений. Если возможно совершить ход №5 (Установка фигуры), то текущее положение записывается в список. Этот список содержит в себе кортежи, каждый из которых хранит информацию о найденном конечном положении, а именно x0, y0 (координаты точки привязки), nf (Номер фигуры) и nk (номер конфигурации фигуры).

Затем перебираются все варианты ходов, и если ход можно совершить, при этом не получив одно из предыдущих положений, то текущее состояние стакана записывается в трехмерный список, в котором каждое положение представлено в виде матрицы, содержащей значения внутренних клеток игрового поля.

После этого формируется новое положение, получаемое в результате данного хода, записывается номер хода в цепочку, процедура вызывает сама себя, в качестве аргументов передаются измененные координаты точки привязки, номер конфигурации фигуры и состояние стакана. Процедура работает до тех пор, пока можно совершить какой-либо ход, не придя при этом в одно из посещенных ранее положений.

Когда поиск конечных положений окончен, вызывается функция, анализирующая их. Функция находит количество заполненных клеток в стакане, считает изменение количества пустот, находит y-координату самой высокой заполненной клетки в стакане и возвращает списки с этими показателями для каждого полученного в результате перебора конечного положения.

Далее выбираются лучшие конечные положения по первому по приоритетности критерию, среди оставшихся выбираются лучшие по второму критерию, затем по третьему. Оставшиеся конечные положения считаются наиболее эффективными для дальнейшей игры.

На основе этого алгоритма была разработана программа, которая реализует автоматическую игру.

## Эксперименты

Для экспериментов были приготовлен файл с девятью последовательностями. Каждая последовательность состоит из пятидесяти случайных целых чисел от 0 до 6, каждое число – это номер фигуры, которая будет появляться в стакане после установки старой. Для каждого варианта расстановки приоритетов была проведена автоматическая игра с каждой последовательностью фигур. В результате теста получаются средние значения по каждому из показателей за всю игру. С такими же последовательностями проведено десять игр человеческим игроком. каждому из показателей за всю игру. С такими же последовательностями проведено десять игр человеческим игроком

| **Приоритет показателей** | **Среднее кол-во заполненных клеток** | **Среднее кол-во пустот** | **Средняя высота заполненной части стакана** |
|---|---|---|---|
| **123** | 36,1 | 1,4 | 5,0 |
| **132** | 41,6 | 4,6 | 4,8 |
| **213** | 32,0 | 0,4 | 4,6 |
| **231** | 34,6 | 0,4 | 5,0 |
| **312** | 38,0 | 5,2 | 4,5 |
| **321** | 38,5 | 4,9 | 4,5 |
| **Человек** | 33,6 | 1,7 | 4,5 |

Таблица 1 - Усредненные результаты экспериментов

## Итоги исследования

На основании полученных в результате экспериментов данных можно сделать вывод, что существует высокая корреляция между средним количеством заполненных клеток и средним количеством пустот. Уменьшение количества пустот ведет к более плотной укладке тетрамино, что ведёт к более частому заполнению строк, то есть, избегая пустот, алгоритм также способствует сокращению численности занятых клеток. На среднюю высоту заполненной части стакана приоритет показателей влияет незначительно, этот параметр можно опустить при сравнении. Наилучшие результаты показывают те варианты, когда наибольший приоритет отдается второму показателю, а худшие, когда ему отдается наименьший приоритет. Таким образом, можно сделать вывод, что наиболее важный показатель при оценке эффективности хода – это изменение количества пустот в стакане. На втором месте по важности находится количество заполненных клеток. Наиболее эффективный вариант автоматической игры показывает лучшие результаты, чем человек

## Заключение

В результате упорного труда все задачи, в целом, решены.

Была опровергнута гипотеза о том, что наиболее важный критерий – это количество заполненных клеток в стакане, так как наилучшие результаты игры получаются в случае, когда наибольший приоритет отдается изменению количества пустот. Также подтвердилась гипотеза, что автоматический игрок в среднем играет лучше человека.

Работа будет продолжена в следующих направлениях:

- Поиск новых критериев выбора хода
- Проведение дополнительных экспериментов с иным способом оценки эффективности игры и большой выборкой
- Исследование того, как взаимосвязаны показатели, какого их влияние на дальнейшую игру
- Вывод формулы эффективности хода, которая учитывает все показатели и их влияние друг на друга

## ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТИ В ЗАДАЧАХ ЕГЭ


***Немирич Алексей***

*Муниципальное автономное общеобразовательное учреждение*

*«Ангарский лицей№2 им. М.К.Янгеля»,г. Ангарск*

**Руководитель:** Шишмарёва Т.А., учитель математики


**Цель.** Разобрать методы решения задач по теории вероятности в ЕГЭ.

**Задачи:**

- Изучить литературу по данной теме.
- Разобрать основные методы в решении задач.

**Гипотеза:** теория вероятностей применяется в самых разных областях жизни.

**Объект исследования**: теория вероятности.

**Предмет исследования**: применение теории вероятностей в современном мире.

**Методы исследования**:

- Сбор теоретического материала
- обработка теоретического материала
- описание материала
- толкование
- систематизация

- логический анализ
- выводы

**Практическая значимость работы**: этот материал можно использовать на уроках математики при изучении теории вероятностей, а также при подготовке к Государственной Итоговой Аттестации (ОГЭ и ЕГЭ).

Я выбрал данную тему исследовательской работы, потому что она мне интересна и познавательна.

Со случайностью, также как и с математикой, мы встречаемся каждый день. Это может быть как случайная встреча, так случайная находка чего-либо. Этот ряд можно продолжать бесконечно. И я задумался, какова вероятность возникновения тех или иных случайных событий. Например: определить однозначно результат выпадения орла или решки в результате подбрасывания монеты нельзя, но при многократном подбрасывании выпадает примерно одинаковое число орлов и решек. И в этих случаях наука обнаружила интересные закономерности, которые позволяют человеку уверенно чувствовать себя при встрече со случайными событиями.

Теория вероятностей - это один из важнейших разделов математики. Это наука, занимающаяся изучением закономерностей массовых случайных явлений. Она имеет длительную историю. Вероятностные и статистические методы в настоящее время глубоко проникли в нашу жизнь. Они используются в физике, технике, экономике, биологии и медицине. В современном мире автоматизации производства теория вероятности необходима специалистам для решения задач, связанных с выявлением возможного хода процессов, на которые влияют случайные факторы (например, количество бракованных изделий). Для изучения физических явлений производят наблюдения или опыты. Эти результаты обычно регистрируют в виде значений некоторых наблюдаемых величин. При повторении опытов мы обнаруживаем разброс результатов. Например, повторяя измерения одной и той же величины одним и тем же прибором при сохранении определенных условий (температура, влажность и т.п.), мы получаем результаты, которые хоть немного, но все же отличаются друг от друга.

Пытаясь найти ответы на свои вопросы, я обратился к теории вероятностей. Это событие и побудило меня к созданию данного проекта. Я считаю, что тема моей работы актуальна на сегодняшний день, так как теория вероятности связана с нашей жизнью и играет значимую роль в современном мире и позволяет углубить знания о важном разделе математики.

## Теория вероятности. Её история и основные понятия.

### История возникновения теории вероятностей.

Возникновение теории вероятностей как науки относят к средним векам и первым попыткам математического анализа азартных игр (орлянка, кости, рулетка). Первоначально её основные понятия не имели строго математического вида, к ним можно было относиться как к некоторым эмпирическим фактам, как к свойствам реальных событий, и они формулировались в наглядных представлениях. Самые ранние работы учёных в области теории вероятностей относятся к XVII веку. Исследуя прогнозирование выигрыша в азартных играх, Джероламо Кардано, Блез Паскаль и Пьер Ферма открыли первые вероятностные закономерности, возникающие при бросании костей. Под влиянием поднятых и рассматриваемых ими вопросов решением тех же задач занимался и Христиан Гюйгенс. Важный вклад в теорию вероятностей внёс Якоб Бернулли: он дал доказательство закона больших чисел в простейшем случае независимых испытаний. В результате теория вероятностей приобрела строгий математический вид и окончательно стала восприниматься как один из разделов математики.

**Основные понятия теории.**

**Теория вероятностей** - математическая наука, изучающая закономерности, присущие массовым случайным явлениям. Предметом теории вероятностей являются математические модели случайных явлений.

При этом под **случайным явлением** понимают явление, предсказать исход которого невозможно.

Цель теории вероятностей - осуществление прогноза в области случайных явлений, влияние на ход этих явлений, контроль их, ограничение сферы действия случайности.

В настоящее время нет практически ни одной области науки, в которой в той или иной степени не применялись бы вероятностные методы.

**Случайным событием** называется любой исход опыта, который может произойти или не произойти.

Если появление одного события в единичном испытании исключает появление другого, такие события называются **несовместными**.

Если при рассмотрении группы событий может произойти только одно из них, то его называют **единственно возможным**.

Наибольшее внимание математиков в течение нескольких столетий привлекают **равновозможные события.**

**Случайная величина** – это величина, характеризующая собой результат предпринятой операции и которая может принимать различные значения при различных операциях, какими бы однородными были условия их осуществления.

**Практическая часть. Решение задач.**

1.Задачи только на определение вероятности

2.Решение задач с применением таблиц

3.Задачи с использованием элементов комбинаторики

4.Задачи на правила сложения и умножения вероятностей

5.Новые задачи по теории вероятности

**1.Задачи только на определение вероятности**

**2.Решение задач с применением таблиц**

*Одновременно бросают 2 игральные кости. Найти вероятность того, что в сумме выпадет менее 5 очков.(1\6)*

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

| + | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

2. *Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что произведение числа очков делится на 3.(5/9)*

| * | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 2 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |
| 3 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 |
| 4 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 |
| 5 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 |
| 6 | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 |

3. *Игральную кость бросают дважды. Найти вероятность того, что разность числа очков на первой и второй кости будет от 2 до 5(.5/81)*

| - | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | -1 | -2 | -3 | -4 | -5 |
| 2 | 1 | 0 | -1 | -2 | -3 | -4 |
| 3 | 2 | 1 | 0 | -1 | -2 | -3 |
| 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | -1 | -2 |
| 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | -1 |
| 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |

*4.Бросают 3 игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпало 15 очков.*

В случае с 3 игральными костями таблицы составляют уже реже, так как их нужно будет аж 6 штук (а не одна, как выше), обходятся простым перебором нужных комбинаций.
6*6*6=216

Теперь подберем такие исходы, которые дают в сумме 15 очков.

(3,6,6),(6,3,6),(6,6,3),(4,5,6),(4,6,5),(5,4,6),(6,5,4),(5,6,4),(6,4,5),(5,5,5).10 благоприятных исходов. P=10/216=0.046

**3.Задачи с использованием элементов комбинаторики**

*1.В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что орел выпадет ровно один раз* **РР, ОР, РО и ОО** ответ 0,5

*2.Монету бросают 4 раза. Найти вероятность того, что герб выпадет от 2 до 3 раз.*

Все возможные комбинации для 4 бросков монеты.**ОООО, ОООР, ООРО, ООРР, ОРОО, ОРОР, ОРРО, ОРРР,**
**РООО, РOОР, РОРО, РОРР, РРОО, РРОР, РРРО, РРРР.**

Теперь выбираем те, где герб (он же орел, он же буква О) встречается 2 или 3 раза: **ОООР, ООРО, ООРР, ОРОО, ОРОР, ОРРО, РООО, РООР, РОРО, РРОО,**

$$m = C_4^2 + C_4^3 = \frac{4!}{2!2!} + \frac{4!}{3!1!} = \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2} + 4 = 6 + 4 = 10.$$

благоприятные исходы, а все 16

P=10/16= 0,625

3.Монету бросают 8 раз. Найти вероятность того, что герб выпадет ровно 4 раза

Ответ можно получить без выписывания 256 комбинаций (!!!), просто по аналогии с примером выше:

Всего позиций 256, благополучных 70 и следовательно 70/256=0,273

**4.Задачи на правила сложения и умножения вероятностей**

**5.Новые задачи по вероятности и статистике**

1.Таксист Рушан заметил, что 70% блондинок, которые являются его па ссажирами расплачиваются наличными, а из всех остальных пассажиров тольк о 40% оплачивают поездку наличными. А всего наличными платят 55% пассаж иров. Какова вероятность того, что пассажиркой Рушана будет блондинка?

Пусть x — это кол-во блондинок, а y — это остальные пассажиры.

Тогда по условию имеем, что $0,7x+0,4y=0,55(x+y)$

Откуда, получаем, что $x=y$

Пусть пассажиров 100 (это может быть любое число, ответ не поменяется) $x+y=100$

Так как $x=y$, то $x=y=50$

И искомая вероятность равна $P(A)=50/100=0,5$

Ответ: 0,5

2.Профессор Российского заборостроительного университета Аполлон Ивано вич подсчитал, что Сюзанна Зайцева отсутствует на его лекциях с вероят ностью 0,7, а Виолетта Волкова - с вероятностью 0,8 Вероятность того, ч то обе девушки присутствуют на лекции равна 0,12. Какова вероятность т ого, что на следующую лекцию к Аполлону Ивановичу не придет ни Сюзан на, ни Виолетта?

Вероятность, того хотя бы одна девушка не придет на лекцию $1−0,12=0,88$

Тогда искомая вероятность, $0,8+0,7−0,88=0,62$

Ответ: 0,62

3.Хакер Zero достал с антресоли свой старый компьютер на базе 286 процессор а, но не смог его запустить. Протестировав все 16-
битные регистры процессора, он выяснил,
что вероятность ошибки записи в один из битов регистра составляет 10-
1, а вероятность ошибки чтения, независимо от ошибки записи, - 10-

2. Какова вероятность получить ошибку в бите регистра, если записанный с о шибкой, а потом прочитанный с ошибкой бит даёт правильный результат?

Мы можем получить ошибку, когда запишем с ошибкой и прочитаем правильно и наоборот

Тогда $P(A)=10-1*(1-10-2)+10-2*(1-10-1)=0,108$

Ответ: 0,108

**Задачи из ЕГЭ.**

**Задача 1:** Вероятность того, что новый электрический чайник прослужит больше года, равна 0,96. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0, 87. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

Решение: Вероятность того, что чайник прослужит больше года (А) равна сумме вероятностей, что чайник прослужит больше года, но меньше двух лет (В) и что чайник прослужит больше двух лет (С). Получаем, А=В+С. Значения А и С нам известны: 0,96 и 0,87 соответственно. Значит, В=А-С=0,96-0,87=0,09.

Ответ: вероятность того, что чайник прослужить больше года, но меньше двух лет, равна 0,09.

**Задача 2:** Механические часы с двенадцатичасовым циферблатом в какой-то момент сломались и перестали ходить. Найдите вероятность того, что часовая стрелка застыла, достигнув отметки 10, но не дойдя до отметки 1 час.

Решение: Всего на циферблате 12 секций, между отметками 10 часов и 1 час таких секций 3. Значит, по формуле теории вероятностей: Р=3/12=0,25.

Ответ: 0,25.

**Задача 3:** Если гроссмейстер А. играет белыми, то он выигрывает у гроссмейстера Б. с вероятностью 0,52. Если А. играет черными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,3. Гроссмейстеры А. и Б. играют две партии, причем во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза.

Решение: Формула вероятности двух независимых одновременных событий равна Р=А*В. Значит, Р=0,52*0,3=0,156.

Ответ: 0,156.

**Задача 4:** Какова вероятность того, что случайно выбранный телефонный номер оканчивается двумя чётными цифрами?

Решение: всего существует пять четных цифр: 0, 2, 4, 6, 8. Вероятность, что число окажется четным равна 5/10=0,5. По формуле, вероятность того, что номер оканчивается на две четных цифры равна 0,5*0,5=0,25.

Ответ: 0,25.

**Задача 5:** Биатлонист пять раз стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что биатлонист первые три раза попал в мишени, а последние два промахнулся. Результат округлите до сотых.

Решение: Вероятность каждого из первых трех событий равна 0,8. Вероятности 4 и 5 события одинаковы и равны 1-0,8=0,2. Так как события одновременны и независимы, мы перемножаем вероятности: 0,8*0,8*0,8*0,2*0,2=0,02048. Округляя до сотых, получаем 0,02.

Ответ: 0,02.

**Задача 6:** Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,01. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,96. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,05. Найдите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная батарейка будет забракована системой контроля.

Решение: Система может забраковать как исправную, так и неисправную батарейку. Эти события несовместны, тогда вероятность их суммы равна сумме их вероятностей. Возможны два варианта: батарейка неисправна и система ее забраковала, вероятность этого события равна $P1=0.01*0.96=0.0096$. Если батарейка исправна, то система тоже может ее забраковать, но с вероятностью $P2=0.99*0.05=0.0495$. Тогда найдем искомую вероятность как $P=P1+P2=0.0591$.

Ответ: 0.0591.

**Задача 7:** В Волшебной стране бывает два типа погоды: хорошая и отличная, причём погода, установившись утром, держится неизменной весь день. Известно, что с вероятностью 0,7 погода завтра будет такой же, как и сегодня. 15 июня погода в Волшебной стране хорошая. Найдите вероятность того, что 18 июня в Волшебной стране будет отличная погода.

Решение: Так как нам надо найти вероятность того, что 18 июня будет отличная погода, то на погоду 16, 17 и 18 июня возможны следующие варианты (Х- хорошая погода, О - отличная погода): Х Х О, Х О О, О Х О, О ОО. Найдем вероятности каждого из вариантов с учетом того, что 15 июня погода хорошая.

$P1=0.7*0.7*0.3=0.147$,

P2=0.7∗0.3∗0.7=0.147,

P3=0.3∗0.3∗0.3=0.027,

P4=0.3∗0.7∗0.7=0.147.

Так как эти события (варианты развития погоды) являются несовместными, то чтобы найти вероятность того, что 18 июня будет отличная погода, надо сложить получившиеся вероятности (вероятность суммы событий равна сумме вероятностей событий). P=P1+P2+P3+P4=0.468.

Ответ: 0.468.

**Задача 8:** Перед началом волейбольного матча капитаны команд тянут честный жребий, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Монтёр» по очереди играет с командами «Ротор», «Статор» и «Мотор». Найдите вероятность того, что «Монтёр» будет начинать только первую игру.

Решение: Капитан команды "Монтер" будет трижды кидать жребий: с капитаном команды "Ротор", затем с капитаном команды "Статор" и с капитаном команды "Мотор". В первом жребии вероятность начать игру равна 0.5. Далее вероятность не начинать игру со "Статором" и с "Мотором" равна также по 0.5. Таким образом, вероятность начать только первую игру равна P=0.5∗0.5∗0.5=0.125.

Ответ: 0.125.

**Задача 9:** Какова вероятность того, что при бросании двух игральных кубиков выпадут числа, сумма которых делится на 5? Ответ округлите до сотых.

Решение: Всего при бросании двух кубиков возможны 6∗6=36 вариантов. Варианты, при которых выпадут числа, сумма которых кратна 5, следующие: 1 4, 4 1, 5 5, 2 3, 3 2, 6 4, 4 6. Итого имеем 7 таких вариантов. Тогда вероятность того, что сумма чисел будет кратна 5, равна (с учетом округления до сотых) P=7/36=0.19.

Ответ: 0.19.

**Задача 10:** С 5 по 24 июня включительно в доме должны произвести проверку газовых счетчиков. Найдите вероятность того, что эта проверка осуществится в течение первой недели, т.е. в период с 5 по 11 июня.

Решение: Всего на проверку счетчиков заложено 24-5+1=20 дней. Вероятность того, что проверка произойдет в течение первой недели (7 дней) равна P=7/20=0.35.

Ответ: 0.35.

**Заключение.**

В ходе моей исследовательской работы я познакомился с теорией вероятностей и некоторыми областями жизни, в которых она применяется. Я узнал много новых и интересных фактах, о которых не знал раньше. В дальнейшем я продолжу работу по данной проблематике, но уже более углубленно.

Проанализировав собранную мной информацию, я понял, что шанс выиграть в лотерею крайне мал, поэтому играть в них не стоит.

Создавая эту работу, я удивился, насколько широко применяется теория вероятностей, и научился решать задание 4 в ЕГЭ, связанное с ней. Данный материал можно использовать на уроках математики при изучении теории вероятностей, а также при подготовке к Государственной Итоговой Аттестации (ОГЭ и ЕГЭ).

Выдвинутая мной гипотеза подтвердилась: Теория вероятностей очень часто встречается в нашей жизни и играет в ней немалую роль.

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПРИМЕНЕНИЕМ ТЕОРЕМ ЧЕВЫ И МЕНЕЛАЯ

***Петухова Екатерина***

*Муниципальное автономное общеобразовательное учреждение «Ангарский лицей №2 им. М.К. Янгеля», г. Ангарск*

**Руководитель**: Шишмарева Тамара Алексеевна, учитель математики

Среди различных математических разделов, изучаемых в школе, геометрия занимает особое место и играет особую роль. Возрастание значимости геометрии на всех ступенях образовательной лестницы, в самых разных областях науки, техники и искусства - заметная тенденция сегодняшнего времени. Из всех предметов математического цикла именно геометрия обладает самым большим развивающим потенциалом. Однако, за последние годы уровень геометрической подготовки учащихся значительно снизился и достиг минимальной отметки чуть ли не за всю историю существования школьной геометрии.

Особое место в планиметрии отведено двум замечательным теоремам: теореме Чевы и теореме Менелая. Эти теоремы не включены в базовую программу курса геометрии средней школы, но их изучение и применение рекомендуется всем, кто интересуется математикой чуть больше, чем это возможно в рамках школьной программы и хочет сдать ЕГЭ на 100 баллов, так как некоторые заданий в это экзамене могут основываться именно на этих двух теоремах.

**Цель.** Изучить теоремы Чевы и Менелая
**Задачи:**
1. Проанализировать литературные источники по данному вопросу.

2. Изучить доказательство данных теорем и теорем, обратных им.
3. Установление справедливости утверждений обеих теорем, а также справедливости обратных утверждений и расширение представлений учащихся о методах, приемах, подходах решения задач по планиметрии перед итоговой аттестацией, продолжением образования в профильной школе
4. Рассмотреть ряд задач, решая которые, необходимо применять данные теоремы.
5. Систематизация ранее полученных знаний и углубление знаний по методам решения задач планиметрии.

**Гипотеза:** при решении целого класса задач эти теоремы позволяют легко и изящно получить решение.

## Историческая справка

Так вот, теоремы Менелая и Чевы относятся к наиболее часто встречающимся конструкциям: первая рассматривает треугольник, стороны или продолжения сторон которого пересечены некоторой прямой (секущей), во второй речь идет о треугольнике и трех прямых, проходящих через его вершины, пересекающиеся в одной точке.

Теорема Чевы установлена в 1678 году итальянским инженером Джованни Чевой.

Джованни Чева (Ceva Giovani, 1648-1734) – итальянский инженер и математик. В 1678 году он предложил доказательство теоремы Менелая и родственной ей теоремы Чевы для плоского случая, основанное на рассмотрении центра тяжести системы из трёх точечных грузов.

Теорема Менелая - это классическая теорема аффинной геометрии. Эта теорема доказывается в третьей книге "Сферики" древнегреческого математика и астронома Менелая Александрийского (ок. 100 г. н.э.). Менелай сначала доказывает теорему для плоского случая, а потом центральным проектированием переносит её на сферу.

## Теорема Чевы

**Определение**: Отрезки, соединяющие вершины треугольника с точками на противолежащих сторонах (или их продолжениях), называют чевианами, если они пересекаются в одной точке.

**Формулировка:** В произвольном треугольнике ABC на сторонах BC, CA, AB или их продолжениях взяты соответственно точки A1, B1, C1, такие, что прямые AA1, BB1, CC1 пересекаются в некоторой общей точке, тогда:

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$$

## Обратная теорема Чевы

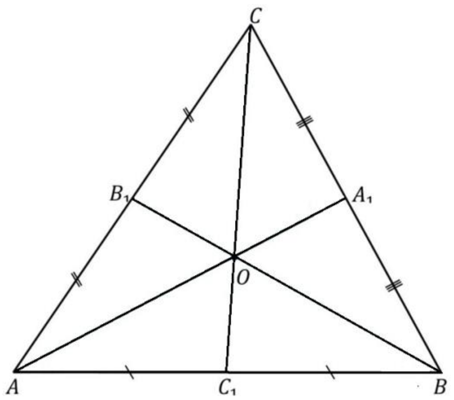
**Формулировка:** Если для выбранных на сторонах треугольника ABC или их продолжениях точек A1, B1 и C1 выполняется условие Чевы:

$$\frac{BA_1}{CA_1}\cdot\frac{CB_1}{AB_1}\cdot\frac{AC_1}{BC_1}=1$$

то прямые AA1, BB1 и CC1 пересекаются в одной точке.

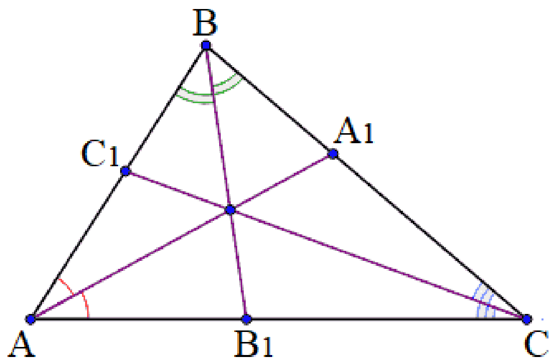
### Следствия из теоремы Чевы

*Следствие 1*. Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины.

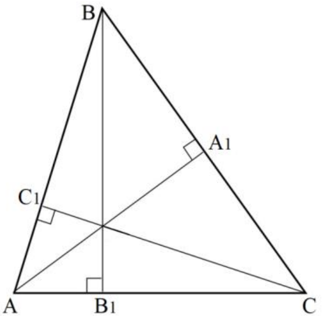



$$\frac{BO}{OB_1}=\frac{AO}{OA_1}=\frac{CO}{OC_1}=\frac{2}{1}$$

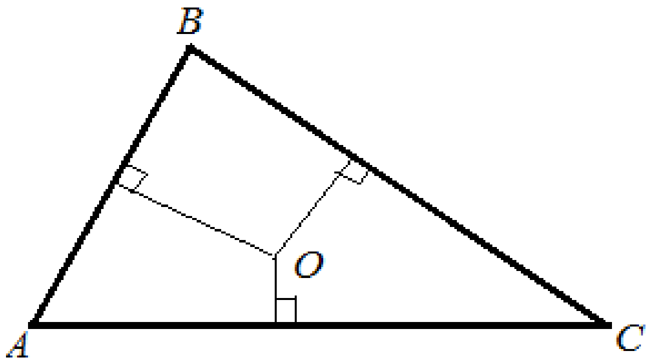
*Следствие 2*. Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.



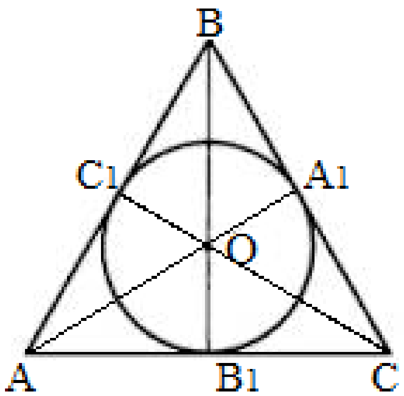

*Следствие 3*. Высоты треугольника (или их продолжения) пересекаются в одной точке (ортоцентре треугольника).




*Следствие 4*. Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.




*Следствие 5*. Прямые, соединяющие вершины треугольника с точками, в которых вписанная окружность касается противоположных сторон, пересекаются в одной точке




## Теорема Менелая

**Формулировка :** Пусть прямая пересекает треугольник ABC, причем $C_1$ - точка ее пересечения со стороной AB, $A_1$ - точка ее пересечения со стороной BC, и $B_1$ - точка ее пересечения с продолжением стороны AC. Тогда имеет место соотношение:

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$$

## Обратная теорема Менелая

**Формулировка:** Пусть в треугольнике ABC точки $A_1$, $B_1$, $C_1$ принадлежит прямым BC, AC, AB соответственно, тогда, если

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1,$$

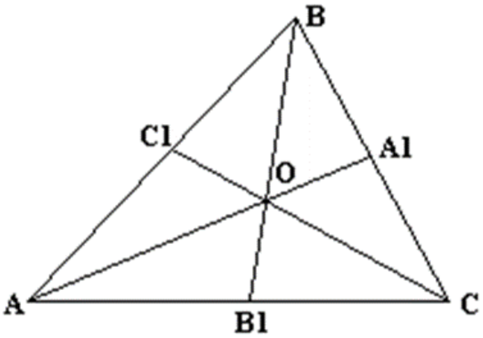
то точки $A_1$, $B_1$, $C_1$ лежат на одной прямой.

## Практическая часть

## Примеры решения задач с применением теоремы Чевы

Задача №1

**Дано:** $\triangle$ ABC




**Доказать:** медианы треугольника пересекаются в одной точке.

**Доказательство:**
Пусть $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ – медианы треугольника ABC.

Проверим равенство: $\frac{AC_1}{C_1B} * \frac{BA_1}{A_1C} * \frac{CB_1}{B_1A} = 1$, 1*1*1=1 (верно).
Утверждение доказано согласно теореме Чевы**.**

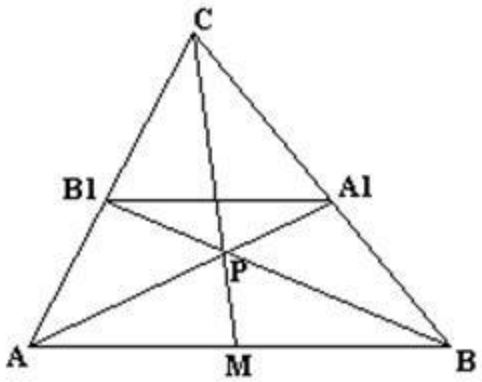
Задача №2

**Дано:** $\Delta$ABC, CM – медиана,

$P \in CM$,

$AP \cap BC = A1$,

$BP \cap AC = B1$




**Доказать:** A1B1 || AB

**Доказательство:**

Прямые AA1, BB1 и CM пересекаются в одной точке P.

По теореме Чевы: $\frac{CA_1}{A_1B} * \frac{BM}{MA} * \frac{AB_1}{B_1C} = 1$, $\frac{BM}{MA} = 1$,

Поэтому $\frac{CA_1}{A_1B} = \frac{B_1C}{AB_1}$ => $\frac{CA_1}{CB} = \frac{CB_1}{CA}$

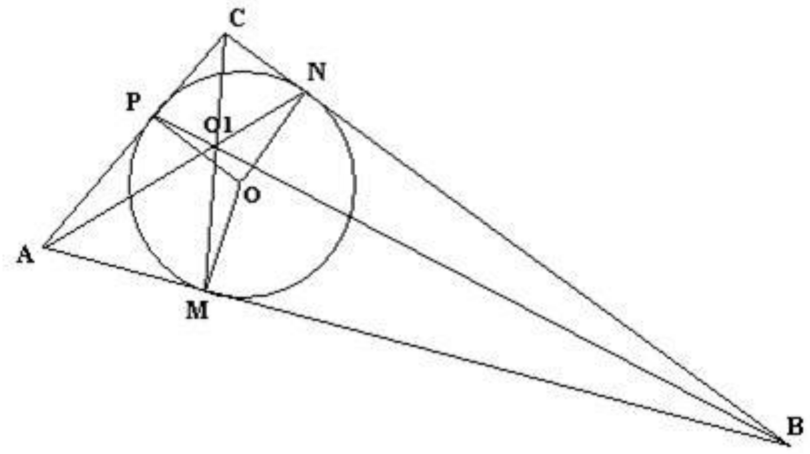
$\Delta$CB1A1 подобен $\Delta$CAB ( $\frac{CA_1}{CB} = \frac{CB_1}{CA}$ ; $\angle$C – общий)

Значит, $\angle$CB1A1 = $\angle$CAB – соответственные при прямых B1A1 и AB и секущей AC, поэтому A1B1 || AB. Что и требовалось доказать.

Задача №3

**Дано:** $\Delta$ABC. Окружность (O;r) – вписана в $\Delta$ABC.

OM=ON=OP=r




**Доказать:** AN; BP, CM пересекаются в одной точке

**Доказательство:**

По свойству отрезков касательных, проведённых из одной точки AM=AP=a; BM=BN=b; CN=CP=c.

Найдём произведение отношений:

$$\frac{AM}{MB} * \frac{BN}{NC} * \frac{CP}{AB} = \frac{a}{b} * \frac{b}{c} * \frac{c}{a} = \frac{a*b*c}{b*c*a} = 1$$

По теореме Чевы AN $\cap$ BP $\cap$ CM=O1

## Примеры решения задач с применением теоремы Менелая

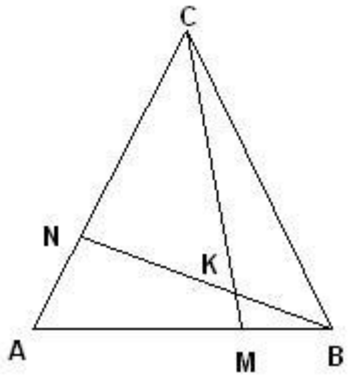
Задача №1

**Дано:** $\Delta$ABC; $\frac{AM}{MB} = \frac{CN}{AN} = 2$

CM $\cap$ BN = K,

M $\in$ AB,

N $\in$ AC




**Найти:** $\frac{BK}{KN}$

**Решение:**

Рассмотрим $\Delta$ABN и секущую CM (точки пересечения M, K, C).

По теореме Менелая: $\frac{BK}{KN} * \frac{CN}{CA} * \frac{AM}{MB} = 1$.

т. к. $\frac{AM}{MB} = 2 = \frac{2}{1}$, $\frac{CN}{AN} = 2 = \frac{2}{1}$,

тогда $\frac{CN}{CA} = \frac{2}{3}$, то $\frac{BK}{KN} * \frac{2}{3} * \frac{2}{1} = 1$,

следовательно, $\frac{BK}{KN} = 1 : \frac{4}{3} = \frac{3}{4}$

Ответ: $\frac{BK}{KN} = \frac{3}{4}$

<u>Задача №2</u>

**Дано:** $\Delta$ABC; $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{CB_1}{B_1A} = 2$;

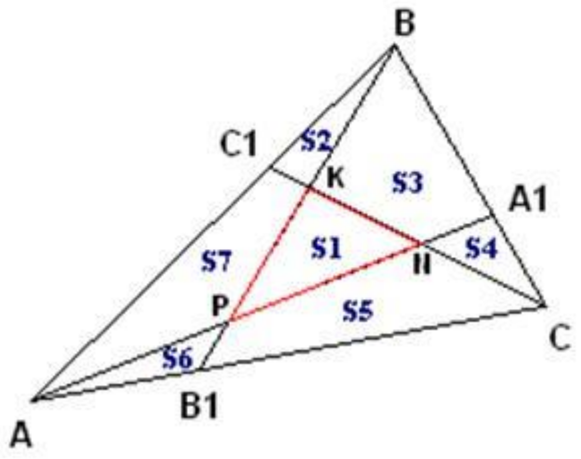
A1 $\in$ BC;

B1 $\in$ AC;

C1 $\in$ AB.

SABC = S,

$\Delta$PKN ограничен прямыми: AA1, BB1, CC1.




**Найти:** SPKN

**Решение:**

По теореме Менелая: $\frac{C_1K}{KC} = \frac{1}{6}$, следовательно, $\frac{C_1K}{C_1C} = \frac{1}{7}$.

Значит, SC1KB = $\frac{1}{7}$SC1BC

Аналогично SAB1P= $\frac{1}{7}$SAB1B, SA1NC= $\frac{1}{7}$SACA1

По условию A1C= $\frac{1}{3}$ CB, следовательно, SACA1= $\frac{1}{3}$ SABC, следовательно, SA1NC= $\frac{1}{21}$SABC

AB1= $\frac{1}{3}$AC, следовательно, SABB1= $\frac{1}{3}$SABC, следовательно, SAPB1= $\frac{1}{21}$SABC

C1B= $\frac{1}{3}$AB, следовательно, SC1BC= $\frac{1}{3}$SABC, следовательно, SC1BK= $\frac{1}{21}$SABC

SABC=SACA1+SCC1B-SA1NC+SAPKC1+SKPN , пусть SABC=S.

S= $\frac{1}{3}$S+ $\frac{1}{3}$S- $\frac{1}{21}$S+ $\frac{5}{21}$S+SKPN

S= $\frac{18}{21}$S+ SKPN, откуда SKPN=(1- $\frac{18}{21}$)S= $\frac{3}{21}$S; SKPN= $\frac{1}{7}$S

Ответ: SKPN= $\frac{1}{7}$S

<u>Задача №3</u>

**Дано:** четырёхугольник ABCD;

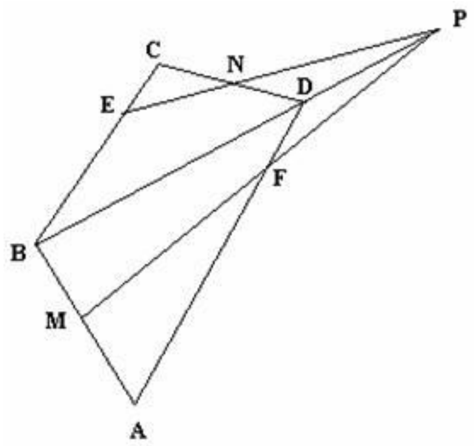
P $\in$ BD;

N – середина CD;

M – середина AB;

PN $\cap$ BC=E;

PM $\cap$ AD=F




**Доказать:** $\frac{BE}{EC}=\frac{AF}{FD}$

**Доказательство:**

Используем теорему Менелая для $\Delta$BCD и секущей EP.

$\frac{BE}{EC}*\frac{CN}{ND}*\frac{DP}{PB}=1$; CN=ND; следовательно, $\frac{CN}{ND}=1$.

$\frac{BE}{EC}*1*\frac{DP}{PB}=1$, следовательно, $\frac{BE}{EC}=\frac{PB}{DP}$.

Рассмотрим $\Delta$ABD и секущую MP. По теореме Менелая: $\frac{BM}{MA}*\frac{AF}{FD}*\frac{DP}{PB}=1$; BM=MA, следовательно, $\frac{BM}{MA}=1$, тогда, $1*\frac{AF}{FD}*\frac{DP}{PB}=1$, следовательно, $\frac{AF}{FD}=\frac{PB}{DP}$.

Из двух равенств: $\frac{BE}{EC}=\frac{PB}{DP}$ и $\frac{AF}{FD}=\frac{PB}{DP}$, следует что, $\frac{BE}{EC}=\frac{AF}{FD}$. Что и требовалось доказать.

## Вывод

Теоремы Менелая и Чевы, сложные на первый взгляд, оказались просты и интересны. Они находят применение в задачах, которые присутствуют на ЕГЭ. Изучение данный теорем и умение использовать их при решение данный задач необходимо нынешним выпускникам. Многие задачи трудные, но длительная и напряжённая работа над одной такой задачей интереснее и полезнее десяти стандартных задач.

В результате проделанной работы я глубже стал понимать задачи, мне интересно их исследовать и решать. Я удовлетворена тем, что изучила новые для себя теоремы и способы их использования.

## УНИВЕРСАЛЬНЫЙ ПРИЗНАК ДЕЛИМОСТИ


***Сагитов Даниил***

*Федеральное государственное казенное общеобразовательное учреждение «Кемеровское президентское кадетское училище», 7 класс*
*г. Кемерово*
**Руководитель**: Борздун Ольга Владимировна, учитель математики


Теория чисел – раздел математики, в котором изучаются свойства чисел. Основной объект теории чисел – натуральные числа. Главное их свойство, которое рассматривает теория чисел - делимость.

Известно, что не всегда одно натуральное число делится на другое натуральное число без остатка. При делении натуральных чисел, мы получаем остаток, допускаем ошибки, в результате - теряем время. Признаки делимости помогают, не выполняя деления, установить, делится ли одно натуральное число на другое.

***Актуальность научной работы*** заключается в том, что признак делимости – это своеобразный алгоритм, который позволяет быстро определить, делится ли заданное число на другое заданное число. Знание признаков делимости значительно сокращает время при счете, а также позволяет развивать память и логическое мышление при выполнении вычислений в уме.

**Гипотеза.** Если можно определить делимость натуральных чисел на 2, 3, 5, 9, 10, то должны быть признаки, по которым можно определить делимость натуральных чисел и на другие числа.

**Цель работы:** изучение признаков делимости чисели выявление наиболее эффективного.

**Задачи:**

1. Изучить историографию вопроса.
2. Систематизировать информацию, выявив проявления закономерностей признаков делимости.

**Объект исследования:** делимость натуральных чисел, на примере числа 232792560.**Предмет исследования:** признаки делимости.

**Методы исследования:** сбор материала, обработка данных, наблюдение, сравнение, анализ, обобщение.

Для исследования мы решили использовать число **a=232792560**.

При выборе числа мы руководствовались следующими соображениями:

1) число не должно быть очень большим;

2) должно иметь достаточное количество делителей для исследования делимости.

Поэтому перемножив все числа от 1 до 20, мы получили исходное число.

Подсчитаем количество делителей числа **a=232792560.**

Для этого воспользуемся разложим число а на простые множители и воспользуемся **основной теоремой арифметики**: Любое натуральное число можно представить в виде произведения простых делителей, взятых в натуральных степенях, причем это разложение единственно.

$$a = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_s^{n_s}$$

$$a = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$$

Количество делителей натурального числа равно

$$(n_1 + 1)(n_2 + 1) \ldots (n_s + 1)$$

Получаем, **960 делителей,** а значит для нашего числа можно сформулировать 958 признаков делимости!

Изучив признаки делимости, мы попробовали выделить следующие группы:

- Делимость по последним цифрам числа.
- Делимость по сумме цифр числа.
- Делимость на составные числа.
- Преобразование числа с помощью арифметических действий.
- Универсальный признак (Признак Паскаля).

## Признак делимости Паскаля

Рассмотрим универсальный признак делимости. Еще его называют признак Паскаля. В литературе мы нашли следующую его формулировку. [1].

Пусть…abcdесть натуральное число записываемое в десятичной системе счисления,гдеd— единицы,c— десятки ит.д.

Пустьn— произвольное натуральное число, на которое мы хотим делить и выводить признак делимости на него.

Находим ряд остатков по следующей схеме:

k— остаток от деления10 на n

r — остаток от деления 10·k на n

s — остаток от деления 10·r на n и так далее.

Так как остатков конечное число, то этот процесс зациклится (не позже, чем через n шагов) и дальше можно его не продолжать. Тогда заданное число имеет тот же остаток от деления на n, что и числоd+k·c+d·r+a·s+…

Достаточно тяжело было разобраться как его применять, поэтому мы данный признак немного доработали и представили его в более наглядном виде, чтобы было понятно, как его использовать.

Пусть нужно проверить делиться ли число m на d. Для этого представим число m в виде (1), а остатки от деления 10 в степени n на d, обозначим rn.

$$m = \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0} \qquad (1)$$

$r_n$ - остатки от деления $10^n$ на d

| $r_0$ | $r_1$ | $r_2$ | $r_3$ | | $\cdots$ | | $r_{n-1}$ | $r_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | | $\cdots$ | | $a_{n-1}$ | $a_n$ |

$$a_0 r_0 + a_1 r_1 + \cdots + a_n r_n \qquad \textbf{(2)}$$

Занесем полученные результаты в таблицу. Где первая строка остатки, а вторая строка- это цифры числа m, записанные в обратном порядке. Составляем сумму из попарных произведений, вида (2).

Получаем, если эта сумма делится на d, то и первоначальное число делится на d.

Пример. Делится ли число 849756 на 7?

Попробуем ответить на этот вопрос, применяя признак Паскаля и зная остатки при делении на 7 от 10, 100, 1000, 10000…Число 6+3·5+2·7+6·9+4·4+5·8 имеет такой же остаток, как и 6+1+0+5+2+5=19, то есть5. Число 849756 не делится на 7.

Применим признак Паскаля к нашему числу:**232792560**

Остаток при делении 10 на 7 равен 3, остаток от деления 10·3 на 7 равен 2, остаток при делении 10·2 на 7 равен 6 и т.д. Получаем, число**0**+**6**·3+**5**·2+**2**·6+**9**·4+**7**·5+**2**·1+**3**·3+**2**·2, имеет такой же остаток, как и 0+4+3+5+1+0+2+2+4=21, остаток при делении 21 на 7 равен нулю, значит, исходное число делится на 7.

Или заполняем таблицу, выписываем сумму из попарных произведений. Для упрощения вычислений для каждого произведения вновь находим остаток от деления на 7, получаем 21.

**232792560: 7**　　**Признак делимости Паскаля**

| $r_0$ | $r_1$ | $r_2$ | $r_3$ | | $\cdots$ | | $r_8$ | $r_9$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 2 | 6 | 4 | 5 | 1 | 3 | 2 |
| 0 | 6 | 5 | 2 | 9 | 7 | 2 | 3 | 2 |
| $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | | $\cdots$ | | $a_8$ | $a_9$ |

$$1 \cdot 0 + 3 \cdot 6 + 2 \cdot 5 + 6 \cdot 2 + 4 \cdot 9 + 5 \cdot 7 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2$$

или 0+4+3+5+1+0+2+2+4=21

## Применение признака Паскаля

Покажем теперь, как с помощью этого универсального признака делимости, можно сформулировать признак делимости на любое число, например, на 41.

Найдём остатки при делении 10, 100, 1000, 10000 и т.д. на 41.

| | | Остаток от деления на 41 |
|---|---|---|
| **0** | 1 | 1 |
| **1** | 10 | 10 |
| **2** | 100 | 18 |
| **3** | 1000 | 16 |
| **4** | 10000 | 37 |
| **5** | 100000 | 1 |
| **6** | 1000000 | 10 |
| **…** | … | … |

Заметим, что удобнее находить искомые остатки не непосредственно делением степени числа 10 на 41, а делением на 41 предыдущего остатка, умноженного на 10. И, поскольку каждый следующий остаток однозначно зависит от предыдущего, то, получив на шестом шаге единицу, делаем вывод, что последовательность остатков начнет повторяться.

Следовательно, признак делимости на 41можно сформулировать следующим образом:

Чтобы проверить, делится ли число на 41, его следует справа налево разбить на части по 5 цифр в каждой. Затем в каждой грани первую справа цифру умножить на 1, вторую цифру умножить на 10, третью – на 18, четвёртую – на 16, пятую – на 37 и все полученные произведения сложить. Если результат будет делиться на 41, то и само число будет делиться на 41.

Таким способом можно получать признаки делимости на любые числа.

## Заключение

В ходе исследовательской работы:

1. Нашли и познакомились с различными источниками информации по теме делимость чисел, с универсальным признаком делимости натуральных чисел.

2. Систематизировали полученную информацию.

3. Научились пользоваться признаком Паскаля для определения делимости чисел, а также формулировать признаки делимости на любое натуральное число.

Все это позволило более широко изучить тему делимости чисел, расширило математический кругозор, узнать, как работает универсальный признак Паскаля, как его можно применить при решении задач.

Работая с различными источниками, мынашлиразличные признаки делимости натуральных чисел, чем**подтвердили правильность гипотезы** о существовании других признаков делимости натуральных чисел, а так же выяснили, что существует универсальный признак делимости, с помощью которого можно получить признак делимости на любое натуральное число. Представили формулировку признака в более наглядном виде.

Знание и использование выше перечисленных признаков делимости натуральных чисел значительно упрощает многие вычисления, этим самым, экономя время; исключая вычислительные ошибки, которые можно сделать при выполнении действия деления. Можно отметить, что формулировки некоторых признаков довольно сложные. Может, поэтому они не изучаются в школе.

## МОДЕЛЬ ИССЛЕДОВАНИЯ КИНЕТИКИ ЯДЕРНОГО РЕАКТОРА

**Сибирякова А., Медведев М.**

*Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение СОШ №78, 10 класс, г. Северск*

**Руководитель:** Правосуд С.С., учитель физики

Проблемы энергообеспечения и энергетической безопасности являются одними из наиболее актуальных в современной мировой экономике. Запасы традиционных органических энергоносителей истощаются, обостряются противоречия между странами-экспортерами и странами-импортерами различных энергетических ресурсов. Хоть атомная энергетика не относится к возобновляемым энергетическим ресурсам, тем не менее, ее часто рассматривают как альтернативу традиционной энергетике, базирующейся на углеводородных ресурсах.

В современных условиях атомная энергетика — один из важнейших секторов экономики России. Динамичное развитие отрасли является одним из основных условий обеспечения энергонезависимости государства и стабильного роста экономики страны

В современном мире с каждым днем растет уровень потребляемой электроэнергии, что требует развития технологий атомной энергетики, которое, в свою очередь, требует знаний теории работы атомного реактора. Проектируя энергетическую установку, решаются физические задачи, от которых зависит экономичность, надежность и безопасность ее работы в будущем.

Изучение основ ядерной физики – то, с чем сталкивается каждый учащийся общеобразовательных учреждений. Однако для осознанного понимания тех процессов, которые протекают на атомном уровне, необходимо углубленное изучение этого материала. Одним из лучших способов усвоения теории является ее практическое закрепление – решение задач. Однако, мы посчитали, что этого недостаточно и захотели еще более углубленно разобраться в вопросе: а как работает атомный реактор? Как из таких маленьких частиц получается огромная энергия, которой достаточно для нужд города?

Основной целью нашего проекта является реализация электрической схемы, которая будет имитировать работу ядерного реактора ВВЭР – 1000. Его мы выбрали неспроста - В настоящее время в России эксплуатируется 15 действующих реакторов ВВЭР – 1000. Например, на Балаковской АЭС все энергоблоки оснащены реактора данного типа. Также их можно найти на Калининской и на Ростовской АЭС.

У нас стоял выбор между ВВЭР –1000 и РБМК – 1000. Было решено остановить свой выбор на реакторе ВВЭР – 1000 ввиду нескольких фактов:

а) они более безопасны. Крупные аварии с РБМК случались неоднократно: аварии 1975, 1992 года на Ленинградской АЭС; аварии 1982, 1986, 1991 года на Чернобыльской АЭС;

б) они более распространены. Как было сказано выше, в России эксплуатируется 15 таких реакторов и строится еще 6 на Балтийской АЭС и на Курской АЭС- 2;

в) эти реакторы хорошо изучены.

В качестве этапов освоения нового материала нашим руководителем Сергеем Сергеевичем был предложен следующий план:

а) распределение ролей – кто будет отвечать за моделирование, кто за расчеты, а кто за программирование;

б) сбор информации из открытых источников, их анализ и систематизация;

в) изучение основ математического моделирования в MathCad и Multisim;

г) физическое и математическое описание процессов, происходящих в атомном реакторе;

д) обоснование математической модели, ее оптимизация;

е) анализ полученных результатов.

## Описание реактора

Ядерный реактор – устройство, предназначенное для получения энергии, путем управляемой цепной реакции деления. ВВЭР - 1000 - Водо-водяной энергетический реактор.Водо – водяной не является тавтологией: это означает, что вода является и теплоносителем, и замедлителем. В качестве теплоносителя она используется для передачи тепловой энергии от деления ядер урана; в качестве замедлителя - для уменьшения кинетической энергии нейтронов.

Цифра1000 в конце названия означает электрическую мощность, которую вырабатывает ядерный реактор, выраженную в мегаваттах. Тепловая мощность такого реактора равна 3000 мегаватт.

Делящимся веществом в активной зоне ядерного реактора является урановое топливо. Урановое топливо получается из природного урана, который в свою очередь, является смесью трех изотопов: $U^{234}$(0.0055%), $U^{235}$(0.72%), $U^{238}$ (99.2745%). В качестве топлива используется только один - $U^{235}$. И неспроста: он очень хорошо может делиться под действием тепловых нейтронов. Тепловым называют нейтронов энергия которого $8{,}01 * 10^{-20}$*Дж*.

В результате деления урана образуется 2 или 3 нейтрона и невозможно заранее предугадать сколько их получится. В ядерной физике принято считать, что в среднем образуется 2,5 нейтрона. Схема деления урана приведена на рисунке 1.

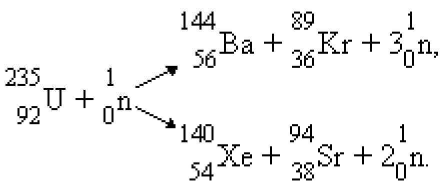


Рисунок 1 - реакция деления $U^{235}$

## Кинетика ядерного реактора

Кинетика ядерного реактора – область науки, которая занимается изучением поведения реактора при ненулевых реактивностях.

В данном случае, реактивностью называют безразмерную величину, равную отношению эффективного коэффициенту размножения нейтронов без единицы к эффективному коэффициенту размножения нейтронов.

$$\rho = \frac{k_{ef} - 1}{k_{ef}}$$

$\rho > 0, k_{ef} > 1$ Реактор надкритический и мощность нарастает;
$\rho = 0, k_{ef} = 1$ Реактор критический и мощность стабильна;
$\rho < 0, k_{ef} < 1$Реактор подкритический и происходит сброс мощности.

Эта величина крайне важна. Именно она показывает, что будет происходить с нашим реактором – набор или сброс мощности. Чтобы до конца разобраться с новыми понятиями мы представляли следующую картину: один нейтрон попадает в ядро урана и делит его на осколки с образованием новых нейтронов. Новые нейтроны, в свою очередь, попадают в новые ядра и освобождают следующие нейтроны. С каждый таким попаданием число нейтронов в реакторе увеличивается, что ведет к увеличению числа их столкновений с ядром и, как следствие, увеличению мощности. Для управления процессом появления новых нейтронов в реакторе существуют специальные "тормоза" – стержни управления. Они могут перемещаться вверх – вниз и тем самым контролировать процесс набора мощности.

Наш руководитель Сергей Сергеевич помог нам составить уравнение, которое описывает кинетику ядерного реактора:

$$N(t) = A_1 e^{P_1 t} + A_2 e^{P_2 t}$$

где $P_1, P_2$ – корни нашего уравнения, $A_1 \, и \, A_2$ – коэффициенты, определенные из начальных условий.

Конечно, в школе не учат решать такие уравнения. Но мы не остановились надостигнутом и стали еще глубже погружаться в изучение материала. Например, нам удалось выяснить, что первое слагаемое отвечает за мгновенные нейтроны деления, а вторая – за запаздывающие. Запаздывающие нейтроны образуются в результате радиоактивного распада осколков деления. Основными осколками являются изотопы $I^{137}$, $I^{138}$, $I^{139}$, $Br^{87}$, $Br^{88}$, $Br^{89}$. Доля запаздывающих нейтронов для $U^{235}$равна всего0,64% и кажется, что ими можно пренебречь. Однако оказалось, что их роль огромна! Именно они определяют процессы, происходящие в активной зоне атомного реактора. Например, мы опытным путем установили, что реактивность не может быть больше, чем половина от этой величины, иначе реактор неконтролируемо разгоняется. Для наглядного отображения полученных результатов мы решили воспользоваться одним из наиболее распространенных пакетов для математического моделирования – MathCad. Полученные результаты приведены на рисунке 2.

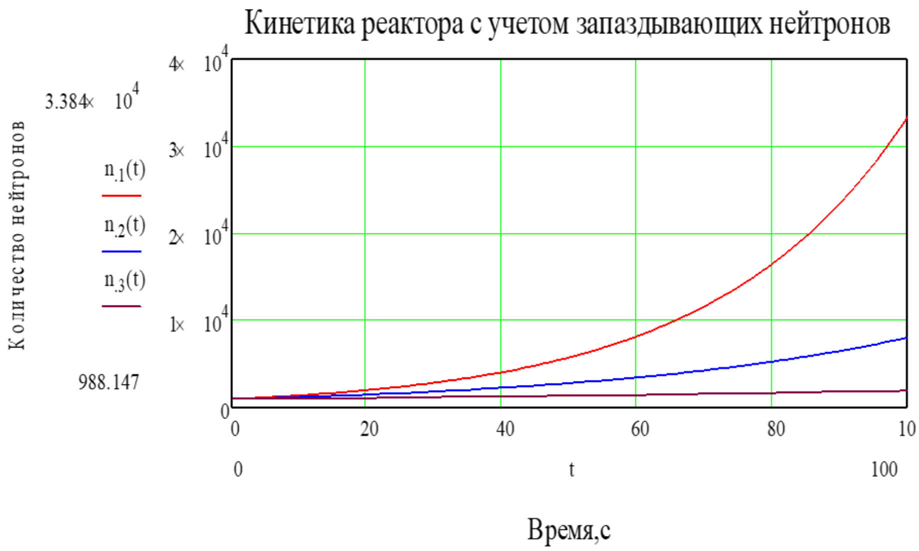



Рисунок 2 – Визуальное решение уравнения кинетики при разных реактивностях

Красным цветом показан процесс при реактивности равной 0.0032, синим при реактивности 0.0020, фиолетовым – 0.0011.

На полученные результаты мы опирались при разработке электрической схемы, которая имитирует работу атомного реактора.

## Описание математической модели

В ходе теоретических рассуждений нами была составлена следующая модель, приведенная на рисунке 3.

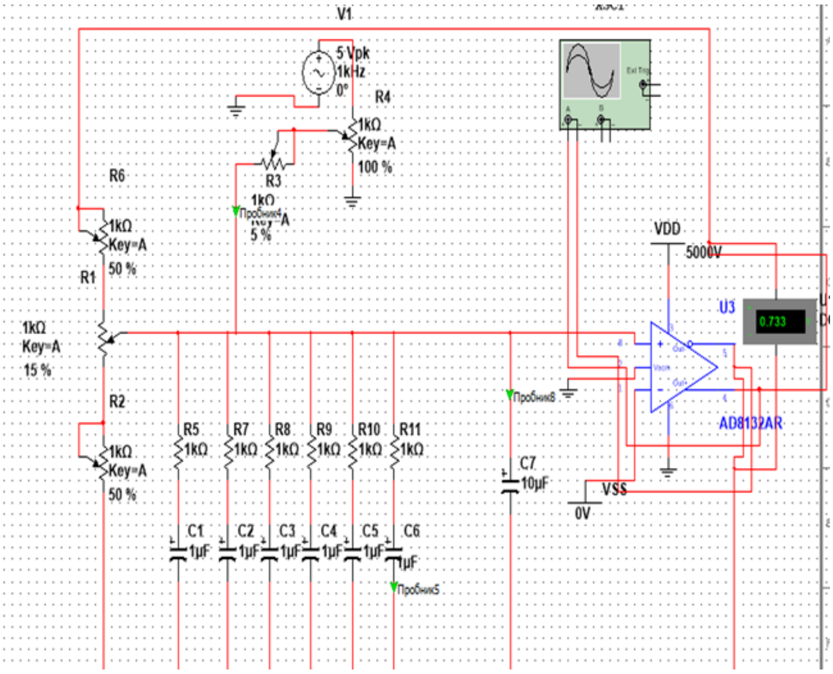


Рисунок 3 – Модель кинетики ядерного реактора.

В качестве атомного реактора здесь выступает операционный усилитель – он умножает ток, проходящий через него; шесть параллельных цепей являются имитацией запаздывающих нейтронов, так как на конденсаторе напряжение отстает от тока по фазе. Реостат, подключенный к ним параллельно, является одним из стержней управления. Изменением его сопротивление мы можем увеличивать или уменьшать долю запаздывающих нейтронов. Аналогично в верхнем участке цепи, изменяя сопротивление реостата, мы увеличиваем или уменьшаем долю мгновенных нейтронов. Центральный реостат является главным управляющим органом – именно он задает реактивность.

Путем оптимизации модели, а также проведения точных расчетов, нам удалось добиться следующих результатов, представленных на рисунках 4 и 5:

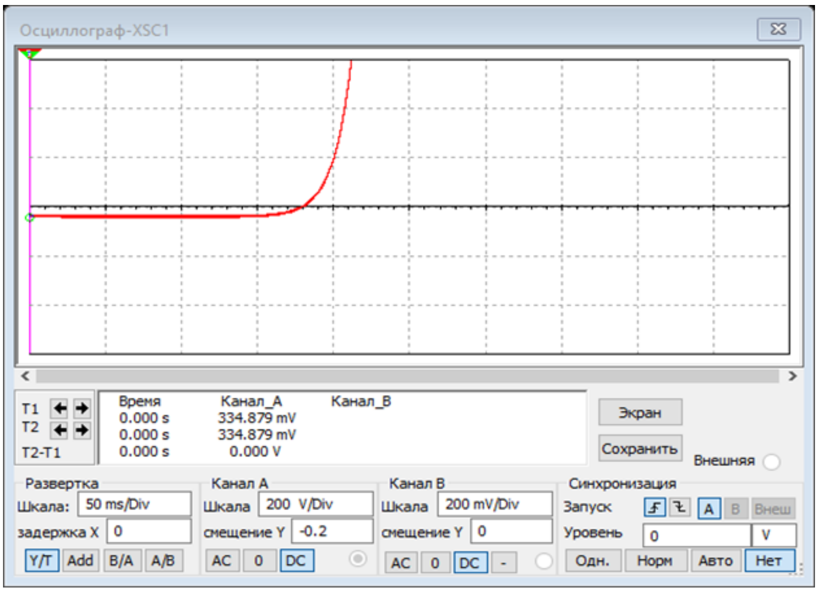


Рисунок 4 – Переходный процесс при реактивности равной 0.0032

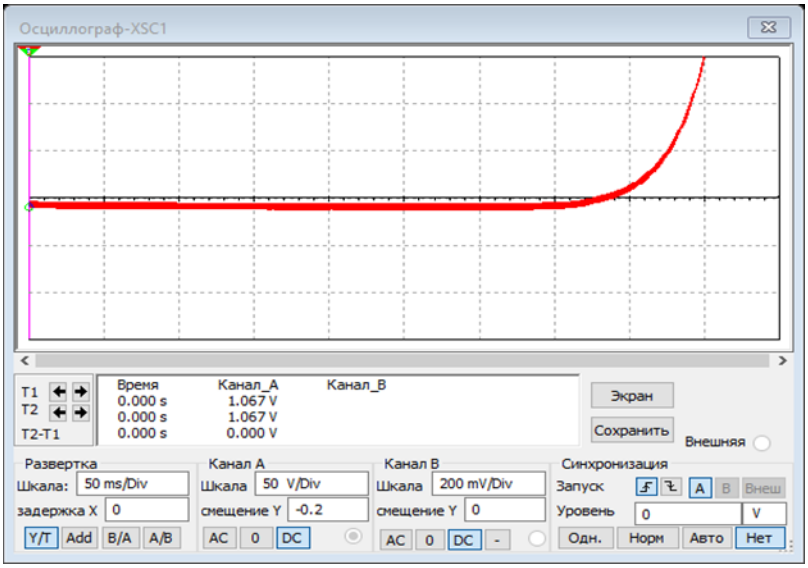



Рисунок 5 – Переходный процесс при реактивности равной 0.0011

Как можно удостовериться полученные результаты очень схожи с полученными ранее. Это может свидетельствовать об одном – модель работает корректно.

## Дальнейшее развитие проекта

В рамках школьного образования на уроках информатики в обязательном порядке изучается язык Pascal. В качестве закрепления навыков программирования мы планируем написать код, который будет имитировать работу атомного реактора при различных реактивностях. Часть программы уже готова: составлены подпрограммы возведение числа в степень, а также мы разобрались с подключением модуля для вывода графиков. В будущем планируем еще большее усложнение – составить такой код, который будет описывать также положение стержней управления, чтобы контролировать разгон и остановку реактора.

Также мы планируем написать методическое пособие для обучающихся школ, чтобы они могли на уроках по программированию окунуться в один самых интересных разделов физики – ядерную. Считаем, что это полезно не только учащимся, но и учителям для развития метапредметных навыков.

**Ресурсы проекта.** Основная часть работы происходила в лаборатории научно – исследовательской работы кафедры Электроники и автоматики физических установок СТИ НИЯУ “МИФИ”. Она оборудована компьютерами с установленными на них программами, необходимыми для реализации проекта. В качестве источников информации использовалась библиотека института, а также открытые источники сети Интернет. Часть работы по поиску и анализу информации происходила дома, но даже тогда мы не теряли связь – постоянно общались в общем чате, делились новыми умозаключениями.

**ИССЛЕДОВАНИЕ СТУПЕНЧАТЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР,**

**ПОЛУЧЕННЫХ НА ЗАНЯТИЯХ ПО ПРОГРАММИРОВАНИЮ**

***Сливинский Александр***

*Частное общеобразовательное учреждение лицей №36 ОАО «РЖД» г. Иркутска, 7 класс*

*Муниципальное бюджетное учреждение дополнительного образования города Иркутска "Центр детского технического творчества"*

**Руководители**: Рейнгольд Григорий Борисович, педагог. доп. образования в.к.к. МБУДО г. Иркутска ЦДТТ,

Денисова Марина Георгиевна, учитель математики ЧОУ «РЖД»

Однажды на занятиях кружка по программированию, автор данной работы получил задание сделать программу [10], которая нарисует на экране компьютера такую фигуру (Рис.1). После того, как задание было успешно выполнено, автор получил более сложное задание (Рис.2). А затем, ещё более сложное(Рис.3).

Рис.1.

Рис.2
.

Рис.3.

Очевидно, что при переходе от одной фигуры к другой имеет место схожесть формы. Эти фигуры показались интересными, и было решено провести их исследование. Несмотря на простоту построения, «узнаваемость» и предсказуемость, к нашему удивлению, поиск в различных источниках описания и исследования именно таких фигур результатов не дал [1,3,5,6,7].

Были получены и исследованы ещё три вида похожих фигур. На последнем этапе работы были сгенерированы пространственные аналоги этих плоских фигур. Все полученные фигуры объединены названием «ступенчатые». В ходе работы были найдены интересные закономерности и выведены формулы.

**Актуальность** работы заключается в получении исследовательского опыта и прикладных умений (таких, как выведение формул для вычисления площадей, периметров, а далее – и объемов ступенчатых тел), в способствовании развитию нестандартного мышления, углублению знаний по математике.

**Новизна работы**: все исследованные фигуры являются оригинальными (даже названия полученным фигурам пришлось давать самостоятельно), а значит, и все полученные закономерности также оригинальные.

## Практическая значимость работы:

Квадраты и кубы – «безотходные», удобные в производстве и предпочитаемые для строительства и дизайна формы. В связи с этим вызывает интерес создание, описание и исследование новых фигур, состоящих из квадратов и кубов.

**Цель работы**: получить и исследовать несколько видов плоских и объёмных ступенчатых геометрических фигур.

## Задачи:

1. Сгенерировать несколько видов интересных плоских и объёмных ступенчатых геометрических фигур, состоящих из равных квадратов (кубов в случае объёмных), ввести, в случае необходимости, соответствующие понятия;
2. Подсчитать площади и периметры (площади поверхностей и объёмы) ступенчатых фигур, состоящих из квадратов и кубов, и вывести соответствующие формулы

## Виды плоских ступенчатых фигур и основные понятия

В ходе работы были сгенерированы следующие фигуры, которые получили следующие названия:

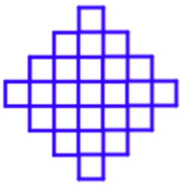
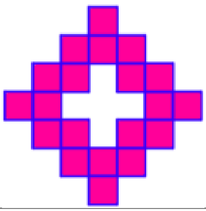
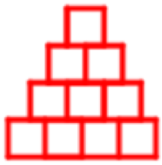
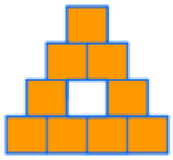
| **Квадратный блин** | **Квадратный бублик** | **Треугольный блин** | **Треугольный бублик** |
|---|---|---|---|
|  |  |  |  |

Рис. 4

Дело было в преддверии Масленицы, первая фигура получила название "Квадратный блин". Квадратный – потому, что в её форме явно прослеживается квадрат. Фигура
«Квадратный блин» с отверстием, как показано на рисунке 4 была названа «Квадратным бубликом». По аналогии были названы «Треугольный блин» и «Треугольный бублик».

В процессе исследования было введено понятие ***порядка фигуры*** – это количество квадратов в каждой стороне, число, характеризующее размер фигуры. Во всех приведенных фигурах на рисунке 4 порядок равен4.

На выше приведённых рисунках 1-3 соответственно изображены фигуры (квадратные блины) 2-го, 3-го и 4-гопорядков.

Рисунок 1.

Рисунок 2.

Рисунок 3.

Таким образом, на данном этапе исследования были созданы четыре произвольные геометрические фигуры, состоящие из квадратов, даны им названия, определены основные понятия.

## Подсчёт площадей и периметров плоских ступенчатых фигур

### Практические результаты подсчёта площадей и периметров плоских ступенчатых фигур

Следующей задачей исследования являлось произведение подсчетов периметров и площадей четырех созданных фигур.

В процессе работы были «вручную» подсчитаны площади и периметры фигур до 7-го порядка. Все данные сводились в соответствующие каждой фигуре таблицы.

## Рекуррентные формулы периметров и площадей плоских ступенчатых фигур

На следующем этапе работы полученные на практике результаты подсчетов, оформленные в таблицы, были проверены ипроанализированы.

Выявлены особенности и закономерности, которые помогли в создании формул. Так, выявлено, что у «Квадратного бублика» (Таблица 2) не существует фигур 1-го и 2-го порядков, т.к. они не имеет отверстия и поэтому совпадают с соответствующими фигурами «Квадратного блина» (Таблица 1). Это явление можно наблюдать и у «Треугольного бублика», у которого по той же причине не существует фигур 1-го, 2-го и 3-гопорядков. Были выявлены рекуррентные (получающиеся из предыдущих) формулы для фигур-«блинов» [8]. Формулы для "бубликов» сводятся к формулам "блинов".

## Общие формулы для подсчета периметров и площадей плоских ступенчатых фигур

На следующем этапе работы полученные рекуррентные формулы решено было дополнить общими формулами для вычисления периметров и площадей «блинов» и «бубликов».

Общие формулы удобнее в применении, так как позволяют получить данные величины сразу, не прибегая к вычислению цепочки предыдущих значений, как в рекуррентных формулах. Для расчетов нужно знать только порядок фигурыn.

При выполнении задачи пришлось познакомиться с правилами возведения в квадрат суммы и разности, а также со способами удобного подсчета сумм чисел, отличающихся на одно и то же число (например, в «квадратных блинах» количество квадратов каждого ряда отличатся от количества соседнего ряда на 2, а в «треугольных блинах» количество квадратов каждого ряда отличатся от количества соседнего ряда на 1).

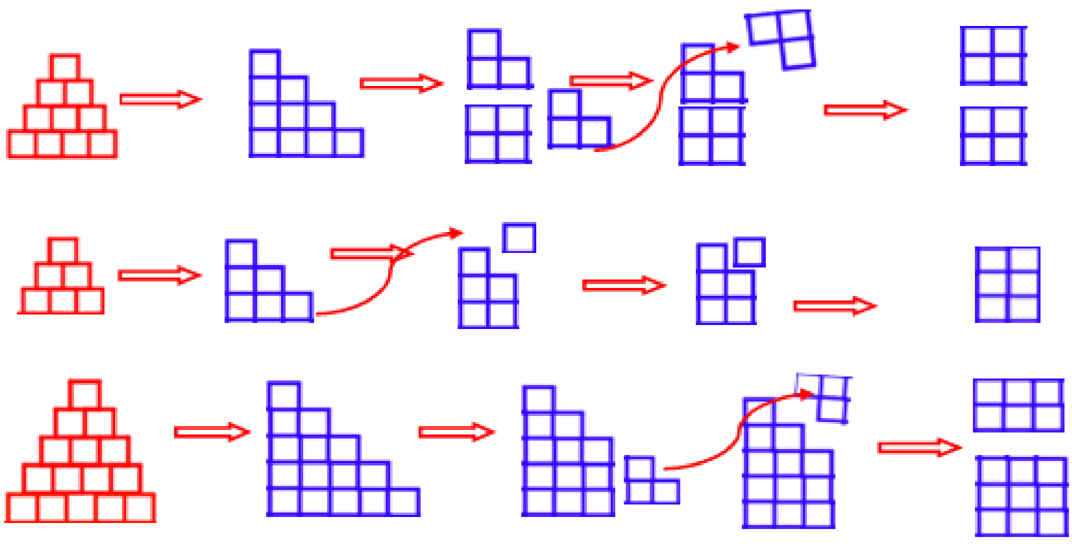


Рис.9

Замеченные свойства:

- Зависимость ***<u>квадратичная</u>***.

## Пространственные аналоги ступенчатых фигур, основные понятия

После работы с плоскими ступенчатыми фигурами было решено попробовать получить их пространственные аналоги. Были сгенерированы две такие фигуры – пространственные аналоги треугольного и квадратного «блинов». Эти фигуры получили свои рабочие названия **«пространственный аналог треугольного блина»** (далее **ПАТБ**) и **«пространственный аналог квадратного блина»** (далее **ПАКБ**).

Перед тем, как описывать эти фигуры, следует заметить, что треугольный блин можно подвергнуть видоизменению, которое, впрочем, не изменяет его периметр и площадь (рис.11):


Рис.11.

Именно новый «треугольный блин» и был использован при создании своего пространственного аналога.

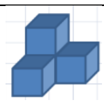
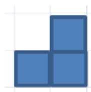
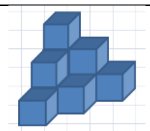
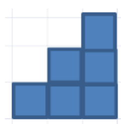
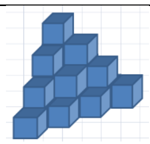
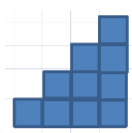
## ПАТБ n-гопорядка

ПАТБ n-го порядка строится из одинаковых кубиков следующим образом. Сначала из кубиков выкладывается треугольный блин n-го порядка.

Затем на нём выкладывается треугольный блин на порядок меньше, и так далее, пока эту конструкцию не завершит один кубик. Очевидно, фигура имеет n этажей.

Замечено, что каждая из шести ортогональных проекций (слева, справа, спереди, сзади, сверху, снизу) представляет собой преобразованный треугольный блин такого же порядка (таблица 1).

Таблица 1.

| n | фигура 3D | фигура 2D |
|---|---|---|
| 1 |  |  |
| 2 |  |  |
| 3 |  |  |
| 4 |  |  |

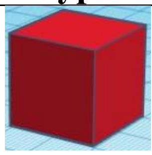
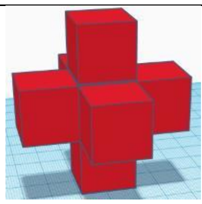
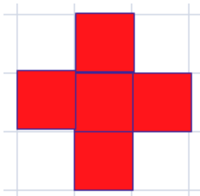
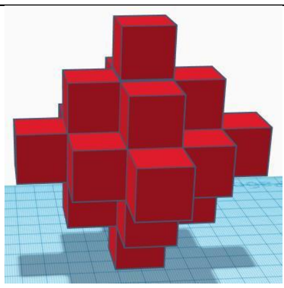
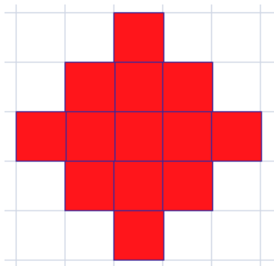
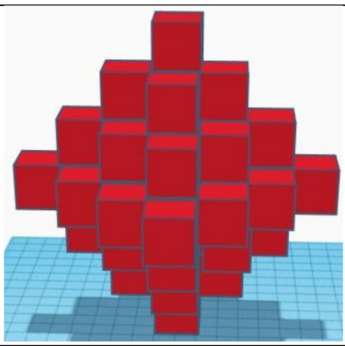
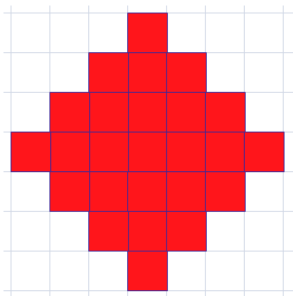
## ПАКБ n-гопорядка

ПАКБ n-го порядка строится следующим образом:

За основу берётся квадратный блин n-го порядка, выложенный из n кубиков. Затем сверху (и снизу тоже!) на нём выкладывается квадратный блин на порядок меньше. И так далее, пока самый последний раз не получится один кубик (ПАКБ 1-го порядка).

Замечательно, что каждая из 6-ти проекций будет представлять квадратный блин такого же n-го порядка (таблица 2)[9].

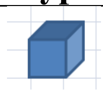
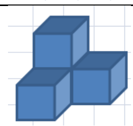
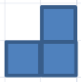
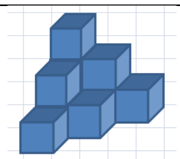
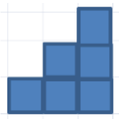
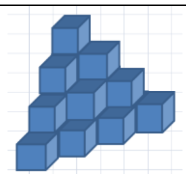
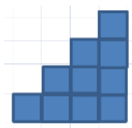
Таблица 2.

| n | Фигура 3D | фигура 2D |
|---|---|---|
| 1 |  |  |
| 2 |  |  |
| 3 |  |  |
| 4 |  |  |

## Подсчет площадей поверхности и объемов пространственных аналогов ступенчатых фигур

### Формулы площади поверхности и объёма ПАТБ-ов.

Таблица 3.

| n | фигура 3D | фигура 2D | S | V |
|---|---|---|---|---|
| 1 |  |  | 6 | 1 |
| 2 |  |  | 18 | 4 |
| 3 |  |  | 36 | 10 |
| 4 |  |  | 60 | 20 |

Площади поверхностей ПАТКБ-ов порядка n (таблица 3) будут равны ушестеренной площади проекции плоской фигуры такого же порядка n:

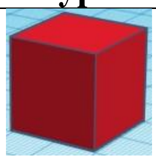
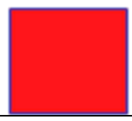
**Spatbl n = 6Stbl n**

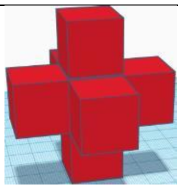
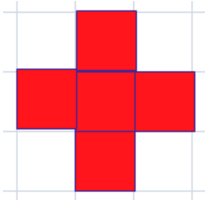
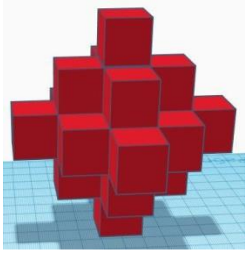
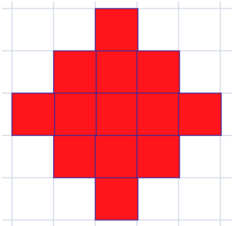
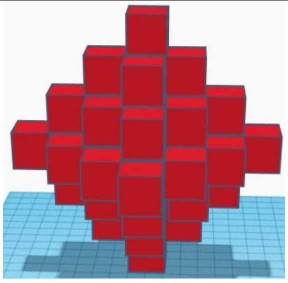
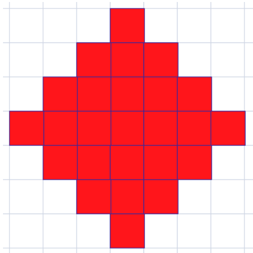
Это очевидно, так как, когда смотрим с 6-ти разных сторон, всё время видим треугольный блин, каждый раз разный.

Объем тел, состоящих из единичных кубиков, равен количеству кубиков, из которых составлено тело. Подсчет объемов ПАТКБ-ов порядка n удобно производить суммированиемобъемов«слоев» высотой один кубик, то есть площадей квадратных блинов от 1 до порядка n.

### Формулы площади поверхности и объёма ПАКБ-ов.

Таблица 4.

| n | Фигура 3D | фигура 2D | S | V |
|---|---|---|---|---|
| 1 |  |  | 6 | 1 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 |  |  | 30 | 7 |
| 3 |  |  | 78 | 25 |
| 4 |  |  | 150 | 63 |

Площади поверхностей ПАКБ-ов порядка n (таблица 4) будут равны ушестеренной площади проекции фигуры, а именно – «квадратного блина» порядка n.

$$\mathbf{Spakbl\ n = 6\ Skbl\ n}$$

Объем тел, состоящих из единичных кубиков, равен количеству кубиков, из которых составлено тело. Подсчет объемов ПАКБ-ов удобно производить суммированием объемов «слоев» высотой один кубик, то есть площадей «квадратных блинов» порядков от n до 1.

При этом в суммировании все «слои», кроме центрального (имеющего порядок n), участвуют по 2 раза, (слои симметрично располагаются сверху и снизу).

Поэтому формулы для вычисления объема ПАКБ-ов можно записать двумя способами:

- либо суммой площадей «верхних» «квадратных блинов», начиная от центрального, порядка n до1 плюс сумма площадей «нижних» «квадратных блинов», начиная от «квадратного блина» порядка n–1 до1:

$$\mathbf{Vpakbln} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{Skbli} + \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{Skbli}$$

- либо суммированием площади центрального «квадратного блина» с удвоенной суммой площадей «квадратных блинов», начиная от «квадратного блина» порядка n–1 до1:

$$\mathbf{Vpakbln = skbln + 2}\sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{Skbli}$$

## Перспективы развития темы

1. Создание модификаций исследуемых фигур на основе новой концепции: из «треугольных блинов» создаются «квадратныеблины».
2. Рассмотрение вопроса фрактальности исследуемыхфигур

### Новая концепция: из «треугольных блинов» создаются «квадратные блины»

Изменение подходов к «треугольным» блинам: «треугольные блины» порядка n рассматриваются, как верхняя часть «квадратных блинов» порядка n. Вводится понятие основания треугольного блина d, равное количеству квадратов в нижнем ряду, при этом d не обязательно равняется n. Новым является рассмотрение фигур с точки зрения четности/нечетности основания d и связывание значения d с длиной «шага» ступени – 1 или ½ квадрата. При этом также создаются пространственные аналоги, выводятся формулы.

## Заключение

В результате исследования были созданы плоские геометрические фигуры, состоящие из квадратов, даны наименования, определены основные понятия исследования, вручную произведены подсчеты периметров и площадей этих фигур.

Созданные фигуры были оснащены не только таблицами с расчетами периметров и площадей до 7-го порядка, но и рекуррентными, и общими формулами, которые помогают произвести подсчеты по данным фигурам любого порядка.

На следующем этапе были придуманы объемные аналоги плоских ступенчатых фигур, а именно – «квадратных и треугольных блинов». Были замечены интересные закономерности, сделаны оригинальные трансформации фигур для удобных подсчетов, выведены общие формулы площадей поверхностей и объёмов объемных ступенчатых фигур, состоящих из квадратов и кубов.

На данном этапе цель работы достигнута, все задачи выполнены.

В перспективе планируется сгенерировать новые виды как плоских, так и объемных ступенчатых фигур и провести по ним аналогичные исследования.

Нами не рассматривались «треугольные равнобедренные блины», в которых основание не равно порядку фигуры n. Это было сделано намеренно, чтобы не разрушать красоту и единство определения порядка n для квадратных и треугольных фигур, как количества квадратов, содержащихся в стороне фигуры. Но в будущем не исключается исследование и такого варианта «треугольных блинов».

В данной работе рассмотрены не все способы построения объемных аналогов ступенчатых фигур, в частности, не рассматривались фигуры «полые», мы над этим работаем. Также планируется попробовать изменять принцип построения объемных фигур не в виде совокупности «блинов», а в виде террасных пирамид, и в этом направлении работа уже начата.

Следующий этап – выведение формул периметров и площадей поверхностей модифицированных фигур, а также создание пространственных аналогов и выведение формул для вычисления объемов в стадии разработки.

Нами также рассматривается вопрос об очевидных признаках фрактальности полученных фигур («узнаваемость», предсказуемость, непрерывность и алгоритмизация процесса получения) и связанной с этим возможности практического применения проводимых исследований.

План дальнейшей работы очерчен, работа будет продолжена.

## ЛИНИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

***Сыромятников И.В.***

*Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение* дополнительного образования «ЦО «Перспектива», г. Зеленогорск

**Руководитель: Михайленко Л.В.,** педагог дополнительного образования

Детали, составляющие различные технические конструкции, нередко имеют сложную форму, в которой можно выделить сочетание геометрических тел – цилиндра, конуса, сферы, а также различных тел, содержащих плоские грани. Эти геометрические тела будем называть геометрическими поверхностями. Пересекаясь определенным образом, тела образуют общую линию, принадлежащую их поверхностям, которая называется линией пересечения.

Зная, какие геометрические тела пересекаются, можно определить, что из себя представляет линия пересечения.

А у нас возник вопрос**: Если мы будем знать линию пересечения двух геометрических поверхностей, сможем ли мы определить какие геометрические тела пересекаются?**

**Цель**: исследовать линии пересечения некоторых геометрических поверхностей.

**Задачи:**

1.Изучить виды геометрических поверхностей.

2.Изучить виды линий пересечения двух геометрических поверхностей.

3.Выяснить в каком случае линий пересечения будет две, в каком случае- одна.

Объектом и предметом исследования являются геометрические поверхности и линии пересечения геометрических поверхностей.

Методы: поисковый, анализ, синтез, моделирование, построение чертежей.

Актуальность**.** Знание геометрии, умение построить чертежи - обязательно нужно знать будущему инженеру.

В школьном курсе геометрии изучаются три вида поверхностей тел вращения: цилиндрическая, сферическая, коническая(рисунок 1,2,3). Кроме этих поверхностей в своей работе мы рассматриваем и гранные поверхности. Их образуют многогранники.

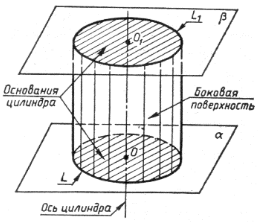



Рисунок 1. Цилиндрическая поверхность.

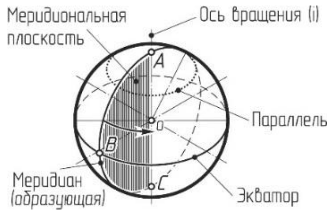



Рисунок 2. Сферическая поверхность.

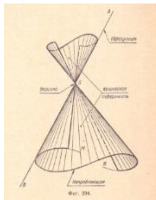


Рисунок 3. Коническая поверхность

Теперь выясним, что такое линия пересечения данных поверхностей.

Определение. *Геометрическое место точек, принадлежащее одновременно двум поверхностям, называют линией пересечения данных поверхностей.*

В зависимости от вида поверхностей линии пересечения могут быть ломаными, кривыми, лекальными.

*1)Ломаные* линии образуются при пересечении многогранников.

2)Кроме окружности и прямой, которые изучаются в школьном курсе геометрии, существуют и другие кривые. На самом деле многие естественные задачи приводят к новым линиям – не прямым и не окружностям. Эти кривые: эллипс, парабола, гипербола. Их называют вместе коническими сечениями или *кривыми второго порядка*.

*3)Лекальными* называют плоские кривые, вычерченные с помощью лекал по предварительно построенным точкам.

Посмотрим, что получается в сечении плоскостью геометрических поверхностей.

1. *Пересечение плоскости с телами вращения.*

*а)* Секущая плоскость параллельна оси, тогда линия пересечения получается ломаной (цилиндрконус), окружность(сфера).

б) Секущая плоскость перпендикулярна оси, у всех тел вращения линия пересечения получается окружность.

в) Секущая плоскость не параллельна, не перпендикулярна оси, тогда линия пересечения представляет собой кривую второго порядка(цилиндр, конус).

2. *Пересечение плоскости с многогранниками.*

Секущая плоскость параллельна основанию, перпендикулярна основанию, секущая плоскость не параллельна и не перпендикулярна основанию- во всех случаях линия пересечения -это ломаная.

***3.****Пересечение двух тел вращения.*

А) Линий пересечения будет две: 1) когда радиус одного цилиндра будет меньше радиуса другого цилиндра или цилиндры одного радиуса; 2) когда пересекаются два конуса; 3) когда радиус цилиндра и радиус основания конуса разные; 4) когда радиус цилиндра и радиус сферы разные; 5) когда радиус  основания конуса и радиус сферы разные.

Во всех случаях получаются кривые второго порядка.

Б) Линия пересечения будет одна: 1) когда одно тело смещено в одну сторонуот оси другого; 2) при пересечении двух сфер; 3) если это будет врезка одного конуса в другой.

В этих случаях получаются кривые второго порядка или лекальные линии.

*4.Пересечение многогранников и тел вращения.*

*А)* Линий пересечения будет две, если: *1)* диаметр цилиндра меньше высоты основания призмы; 2) высота основания призмы меньше диаметра цилиндра; 3)диаметр цилиндра меньше высоты основания пирамиды; 4)высота основания пирамиды меньше диаметра цилиндра; 5) оси симметрии двух фигур пересекаются.

Во всех случаяхполучаются две замкнутые линии, которые можно разбить на кривые второго порядка и ломаные.

Б) Линия пересечения будет одна, если происходит при пересечении двух фигур смещение одной фигуры от оси симметрии другой.

5. *Пересечение двух многогранников*

А) Линий пересечения будет две, если оси симметрии двух фигур пересекаются.

Тогда получаются две разные пространственные ломаные.

Б) В том случае, когда при пересечении происходитсмещение одной фигуры от оси симметрии другой, получается одна пространственная замкнутая ломаная.

Делаем выводы:

*Возможные случаи пересечения двух геометрических поверхностей:*

1.Одна замкнутая линия, состоящая из кривых второго порядка-это врезание одной фигуры в другую.

2.Две замкнутые линии- пересечение насквозь.

3. Совокупность ломаных линий- врезание одной многогранной поверхности в другую.

4. Совокупность двух ломаных линий- пересечение двух многогранных поверхностей.

4. Совокупность плоских кривых второго порядка- пересечение кривой и многогранной поверхности.

Ответим на свой вопрос: *Если мы будем знать линию пересечения двух геометрических поверхностей, сможем ли мы определить какие геометрические тела пересекаются?*

*Не всегда можно определить, какие геометрические фигуры пересекаются, если мы знаем их линии пересечения.*

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1.Арустамов Х. А. Сборник задач по начертательной геометрии.-М.: Машиностроение, 1978. С. 386-414.

2. Бубенников А. В., Громов М. Я. Начертательная геометрия. - М.: Высшая школа, 1973. С. 222-256.

3.Виноградов В.Н. Василенко Е.А. и др.Словарь-справочник по черчению.-М.: 1993.

4. Фролов С. А. Начертательная геометрия. – М.: Машиностроение, 1978.С. 116-158.

## ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

***Теслев Д.С.***

*Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение «Лицей города Юрги», 10 класс*
*г. Юрга*
**Руководитель:** Иванова И.Ю., учитель математики

**В работе рассмотрены способы решения реальной экономической задачи. Был выполнен анализ возможности получения максимальной выгоды, имея начальный капитал в размере 500 тысяч рублей.**

При изучении экономических задач в профильных классах возникает вопрос: «Экономические задачи актуальны во взрослой жизни, или они изучаются только ради ЕГЭ по математике?»

**Гипотеза исследования**: Навык решение экономических задач повысит способность принимать обоснованные решения в сферах, имеющих отношение к управлению финансами.

**Объект исследования** – экономические задачи.

**Предмет исследования** – способы решения экономических задач.

**Цель исследования:** решить реальную экономическую задачу на увеличение капитала.

**Задачи исследования:**

- Разобрать типы экономических задач;
- Рассмотреть методы решения задач;
- Рассмотреть реальную экономическую задачу (на примере вклада).

В работе использованы теоретические и общенаучные методы исследования: анализ и сопоставление данных; наблюдение, описание, сравнение.

Экономические задачи – задачи, решаемые в процессе экономического анализа, планирования, проектирования, связанные с определением искомых неизвестных величин на основе исходных данных. Их решение сопровождается поиском недостающих данных, экспертными оценками, обсуждением, принятием решений [1]. Экономическую задачу ввели в экзамен ЕГЭ с 2015 года [2]. Однако заданиям такого типа не уделяется достаточного времени в курсе базовой школьной программы.

Существует 4 основных вида экономических задач: *задачи на кредиты* (нахождение количества лет выплаты кредита, нахождение процентной ставки по кредиту, нахождение суммы кредита, нахождение ежегодного транша (платы)); *вклады* (нахождение срока вклада, вычисление процентной ставки по вкладу, нахождение суммы вклада, сравнение выгоды, изменяющиеся проценты), *нахождения оптимального решения* (нахождение производительности, нахождение окупаемости) и *нестандартные задачи.*

Разные авторы предлагают большое количество методов решения экономических задач, например: арифметический метод; алгебраический метод; функционально-графический, решение задач по формулам; решение задач в общем виде; решение задач с применением свойства степеней, решение задач с помощью математического анализа, задачи на сравнение [3-9].

Рассмотрим решение реальной экономической задачи на примере вклада. Предположим, что у человека имеется в наличии некоторая сумма, с которой он хочет получить гарантированный доход.

Исходные данные:

1. Исходный капитал в количестве 500 тыс.руб.

2. Прочие затраты и доходы не рассматриваются.

3. Индексация цен, девальвация рубля и налог на прибыль не учитываются.

4. Срок получения дохода – один год.

Рассмотрим несколько вариантов получения прибыли и выберем наиболее выгодный.

*1. Депозитный вклад в банк* [10]. Были рассмотрены популярные банки города Юрги, проведено сравнение их процентных ставок и скрытых условий. Анализ показал, что самый выгодный вклад ( на начало 2021 года) – это вклад в Совкомбанк (название вклада – «**Удобный**») с прибылью 23000 рублей в год.

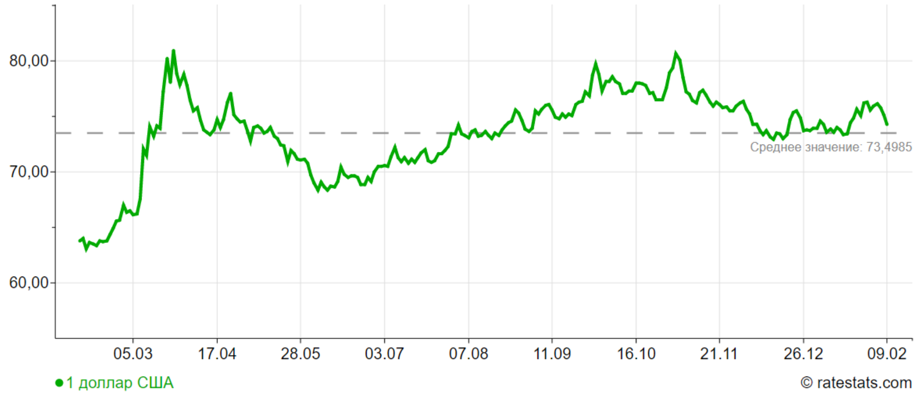



*Рис.1. График изменения курса доллара США за 1 год*

*(с 9 февраля 2020 по 9 февраля 2021) [12]*

*2. Валютные биржи (дивиденды от покупки – продажи валюты разных стран* [11]). Проанализирован курс наиболее популярных валют (доллара США и евро) с февраля 2020 по февраль 2021 (рис. 1) [12-13]. Доход от приобретения доллара США составил бы 79350 рублей в год, а доход от евро - 141 989 рублей в год.

*2. Валютные биржи (дивиденды от покупки – продажи цифровой валюты).* Цифровые валюты набирают популярность в мире [14]. Рассмотрена возможная прибыль от приобретения самой популярной на данный момент криптовалюты – биткоина (рис. 2). Доход составил бы 665000 рублей в год, но и риск в этом случае самый высокий.

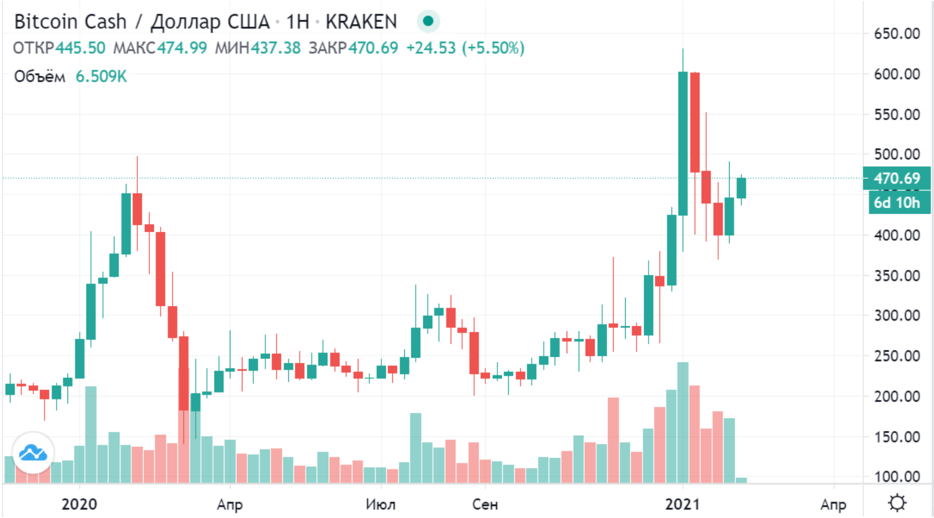



*Рис.2. График соотношения биткоина к американскому доллару за прошедший год [15]*

## ВЫВОДЫ

Рассмотрев возможные виды получения дохода, имея сумму 500 000 рублей, приходим к следующим выводам:

1. Операции с самым большим возможным доходом имеет самые высокие риски неудач.
2. Среди депозитных вкладов в банки г. Юрги самым выгодным на данный момент является вклад «Удобный» (Совкомбанк) с прибылью 23 000 рублей в год.
3. Более высокий процент получения дохода и в тоже время с большими рисками обладают валютные операции на торгах. Ожидаемая прибыль 79 350 рублей в год при покупке доллара и - 141 989 рублей в год при покупке евро.
4. Самое рискованное вложение денежных средств на сегодня, это покупка криптовалют. Но именно торговля криптовалютой может принести самые большие дивиденды 665 000 рублей в год.

# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРОМ ВЕКТОРНО-КООРДИНАТНЫМ СПОСОБОМ

**Щеголихина Полина Евгеньевна, Дубильер Дана Александровна**

*Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение лицей при ТПУ г. Томска, 10 класс*

**Руководитель:** Букина Ольга Владимировна, учитель математики

Задачи с параметрами являются наиболее сложными и нестандартными заданиями, они требуют индивидуального подхода и углубленных знаний. Из года в год они включены не только в ЕГЭ, но и во вступительные экзамены в вузы и неоднократно встречаются в различных математических олимпиадах.

Однако, в школьном курсе математики этим задачам не уделяется достаточное количество внимания. Они вызывают большие затруднения у старшеклассников, и лишь немногие приступают к выполнению заданий с параметром на ЕГЭ, несмотря на то, что они высоко оценивается.

В настоящее время существует много различных сборников, которые освещают графический, аналитический, функциональный методы решения задач с параметрами, но они формулируют данный методочень поверхностно. Исходя из этого,**основной целью**нашего проекта является создание практического сборника задач, необходимого в подготовке к Единым государственным экзаменам (ЕГЭ).

**Задачи проекта:**

1. Изучить научно-методическую литературу по данной теме.
2. Проанализировать задания ЕГЭ прошлых лет.
3. Освоить векторный метод как один из эффективных методов решения задач с параметрами.
4. Разработать систему собственных упражнений по данной теме.

В рамках реализации проекта была рассмотрена основная теория о векторах: операции сложения, вычитания векторов, свойства векторов, вывод основных формул для нахождения расстояния между точками, длины вектора, координат вектора. Собрав весь материал и овладев навыками, мы стали разрабатывать собственный продукт, который может стать опорой для многих ребят в подготовке к 18 заданию из ЕГЭ. Наш сборник состоит из двух разделов: теория и практика. В теоретической части затронуты все важные аспекты векторно-координатного способа, а в практической представлены задания, расположенные последовательно, от более простых к сложным. Данная структура сборника позволит освоить и изучить векторно-координатный способ в совершенстве. Также часть заданий представлена с подробным решением, соответсвующим формату ЕГЭ.

Рассмотрим на следующем примере векторный и координатный методы решения параметров:

**<u>Пример 1.</u>**Найдите все значения параметра$a$, при каждом из которых система уравнений имеет более одного решения.

$$\begin{cases} \sqrt{(x-a)^2+(y+5)^2}+\sqrt{(x-a)^2+(y-5)^2}=10 & (1) \\ (x-3)^2+(y-4)^2=25 & (2) \end{cases}$$

I. Решение векторным методом.

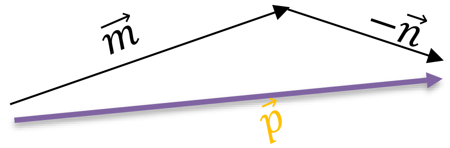
Введём векторы:

$\vec{m}\{x-a; y+5\}; |\vec{m}| = \sqrt{(x-a)^2+(y+5)^2};$

$\vec{n}\{x-a; y-5\}; |\vec{n}| = \sqrt{(x-a)^2+(y-5)^2};$

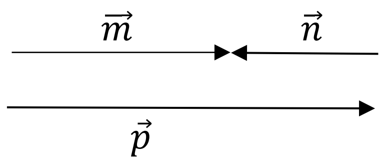
$\vec{p} = \vec{m} - \vec{n};$ $\qquad\qquad$ $\vec{p}\{0; 10\}; |\vec{p}| = \sqrt{0 + 10^2} = 10.$

Тогда первое уравнение системы можно записать$|\vec{m}| + |\vec{n}| = |\vec{p}|$. Рассмотрим геометрическую интерпретацию данного уравнения.




$***\vec{p} = \vec{m} - \vec{n} = \vec{m} + (-\vec{n})$

Заметим, что$\vec{m} \uparrow\uparrow \vec{p}$. Тогда$\vec{m} = \lambda\vec{p}$.




$$\begin{cases} x - a = 0 * \lambda \\ y + 5 = 10 * \lambda \\ \lambda \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y \geq -5 \end{cases}.$$

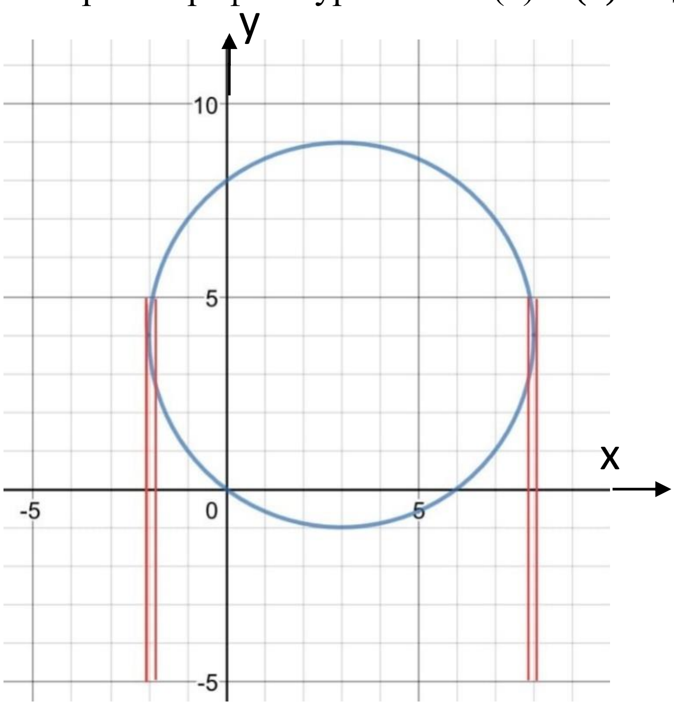
Заметим, что$\vec{n}$ $\uparrow\downarrow$ $\vec{p}$ . Тогда $\vec{n} = \lambda\vec{p}$ .

$$\Rightarrow \begin{cases} x - a = 0 * \lambda \\ y - 5 = 10 * \lambda \\ \lambda \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y \leq 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = a \\ -5 \leq y \geq 5 \end{cases}$$

Рассмотрим уравнение системы (2): $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$ . Графиком данного уравнения является окружность с центром (3;4) и радиусом R=5.

Построим графики уравнений (1) и (2) в одной системе координат.



Единственный корень:

$$\begin{cases} x = a \\ (x-3)^2 + (y-4)^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow a^2 + 9 - 6a + y^2 - 8y + 16 - 25 = 0;$$

$a^2 - 6a + y^2 - 8y = 0;$

$D = 64 - 4a^2 + 24a = 0;$

$4a^2 - 24a - 64 = 0;$

$a^2 - 6a - 16 = 0;$

$$D = 36 + 64 = 100; a = \frac{6 \pm 10}{2} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} a = 8 \\ a = -2 \end{array} \right.$$

Два решения:

$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y-4)^2 = 25 \\ y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow (x-3)^2 + (5-4)^2 = 25;$$

$x^2 - 6x + 9 + 1 - 25 = 0;$

$x^2 - 6x - 15 = 0;$

$D = 36 + 60 = 96; x = a = \frac{6 \pm 4\sqrt{6}}{2} = 3 \pm 2\sqrt{6};$

$\Rightarrow a = 3 \pm 2\sqrt{6};$

$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y-4)^2 = 25 \\ y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow (x-3)^2 + (-5-4)^2 = 25$$

$x^2 - 6x + 65 = 0$

$D = 36 - 65 < 0 \qquad \Rightarrow$ корней нет

Ответ: $a \in (-2;\ 3 - 2\sqrt{6}] \cup [3 + 2\sqrt{6};\ 8)$

Решим данную задачу, рассматривая координаты отдельных точек, а не векторов.

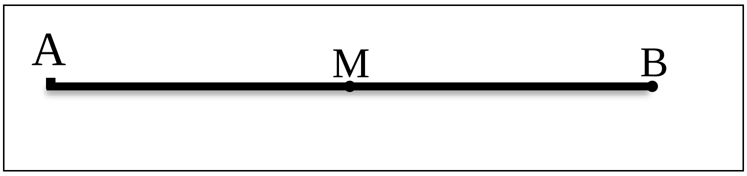
Заметим, что $\sqrt{(x-a)^2 + (y+5)^2}$ и $\sqrt{(x-a)^2 + (y-5)^2}$ выражают длину отрезка.

Рассмотрим точки $A(a; -5)$, $B(a; 5)$, $M(x; y)$, тогда

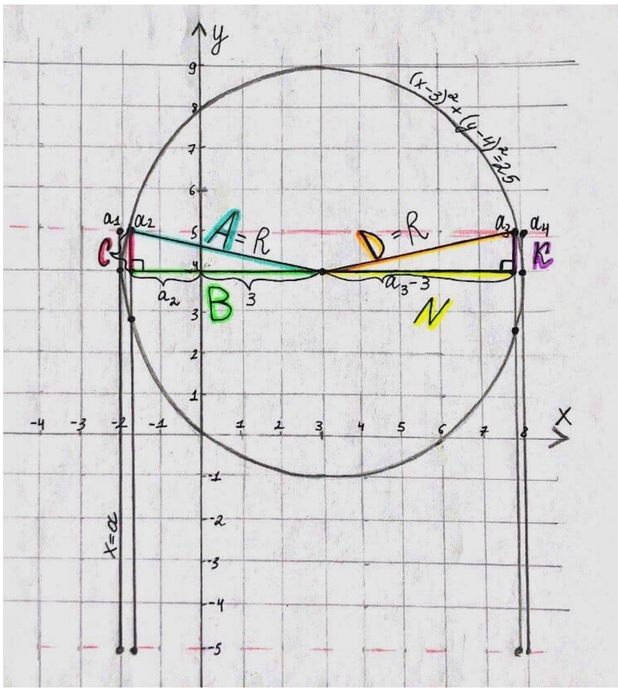
$|\overrightarrow{AM}| = \sqrt{(x-a)^2 + (y+5)^2}$;$|\overrightarrow{BM}| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-5)^2}$ ;

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{10^2} = 10.$

Тогда первое уравнение системы преобразуется$|\overrightarrow{AM}| + |\overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{AB}|$.




Графиком второго уравнения системы является окружность с центром (3;4) и радиусом R=5.




Видим, что более одного решения система уравнений будет иметь при

$a \in (a_1; a_2] \cup [a_3; a_4)$;Найдём эти значения параметра.

$a_1 = -2$; (при данном значении параметра система уравнений имеет ровно одно решение, как видно из чертежа).

$a_4 = 8$;  (при данном значении параметра система уравнений имеет ровно одно решение, как видно из чертежа).

По теореме Пифагора в прямоугольном $\triangle ABC$:

$a_2 + 3 = \sqrt{25-1}$;

$a_2 + 3 = \sqrt{24}$;

$$\begin{cases} {a_2}^2 + 6a_2 + 9 - 24 = 0 \\ a_2 \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} {a_2}^2 - 6a_2 - 15 = 0 \\ a_2 \geq -3 \end{cases}$$

D=36+60=96; $a_2 = \frac{6 \pm 4\sqrt{6}}{2} = 3 \pm 2\sqrt{6}$;

Аналогично, по теореме Пифагора в прямоугольном ⊿DNK:

$a_3 - 3 = \sqrt{24}$;

$$\begin{cases} {a_3}^2 + 6a_3 + 9 - 24 = 0 \\ a_3 \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} {a_3}^2 - 6a_3 - 15 = 0 \\ a_2 \geq 3 \end{cases}$$

$\mathrm{D} = 36 + 60 = 96; a_3 = \frac{6 \pm 4\sqrt{6}}{2} = 3 \pm 2\sqrt{6}; \Rightarrow a_3 = 3 + 2\sqrt{6}.$

$a \in (-2; 3 - 2\sqrt{6}] \cup [3 + 2\sqrt{6}; 8).$

Ответ: $a \in (-2;\ 3 - 2\sqrt{6}] \cup [3 + 2\sqrt{6};\ 8).$

**Вывод**: векторный и координатный методы являются рациональными в решении задач с параметрами, поэтому знание данных способов дает возможность сэкономить время при решении и избежать громоздких вычислений. Разработанный нами сборник позволит ускорить изучение метода и преподнести материал в более понятной и доступной форме не только для одиннадцатиклассников, но и для ребят 9-10 классов.